Уважаемые студенты!

Вам необходимо ознакомиться с теоретическим материалом и законспектировать его, рассмотреть решение примеров, ответить на контрольные вопросы.

Лекция рассчитана на 4 академических часа

- По вопросам обращаться 072-1098278 или hvastov@rambler.ru
- Фотоотчёт конспекта прислать в течении 3 дней со дня получения задания на hvastov@rambler.ru

Лекция

Прямоугольная система координат в пространстве. Формула расстояния между двумя точками. Векторы. Модуль вектора. Сложение векторов. Умножение вектора на число. Угол между векторами.

План.

1. Прямоугольная система координат в пространстве.
2. Координаты вектора. Расстояние между двумя точками. Координаты середины отрезка.
3. Действия над векторами с заданными координатами.
4. Угол между векторами. Скалярное произведение векторов и его свойства. Проекция вектора на ось.

1.Прямоугольная система координат в пространстве.

Если через точку О в пространстве мы проведем три перпендикулярные прямые, назовем их, выберем направление, обозначим единичные отрезки, то мы получим **прямоугольную систему координат в пространстве**. Оси координат называются так: Ох – ось абсцисс, Оу – ось ординат и **Oz – ось аппликат**. Вся система координат обозначается – Oxyz. Таким образом, появляются три **координатные плоскости**: Оxy, Оxz, Оyz.

Приведем пример построения точки В (4;3;5) в прямоугольной системе координат.

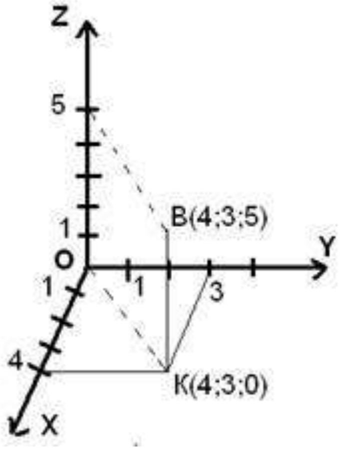

Рис. 1. Построение точки B в пространстве

Рассмотрим расположение точек, у которых одна или две координаты равны 0 (см. Рис. 2).

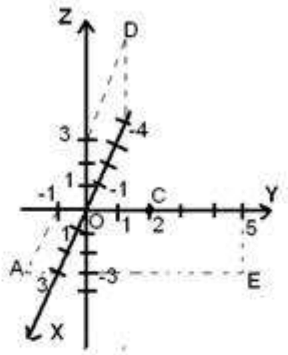

Рис. 2.

Например, точка A(3;-1;0) лежит в плоскости Oxy; точка C(0;2;0) лежит только на оси Oy; точка D(-4;0;3) лежит в плоскости Oxz; точка E(0;5;-3 лежит в плоскости Oyz.

2. Координаты вектора.

Начертим прямоугольную систему координат в пространстве Oxyz. Зададим в пространстве прямоугольную систему координат Oxyz. На каждой из положительных полуосей отложим от начала координат единичный вектор, т. е. вектор, длина которого равна единице. Обозначим единичный вектор оси абсцисс $\bar{i}$, единичный вектор оси ординат $\bar{j}$, и единичный вектор оси аппликат $\bar{k}$ (см. рис. 3). Эти векторы сонаправлены с направлениями осей, имеют единичную длину и ортогональны – попарно перпендикулярны. Такие вектора называют **координатными векторами** или **базисом.**

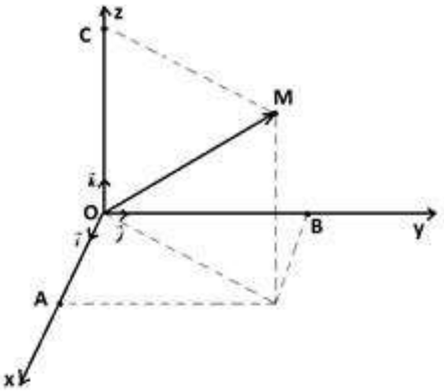

Рис. 3. Разложение вектора по трем координатным векторам. Возьмем вектор $\overline{OM}$, поместим его в начало координат, и разложим этот вектор по трем **некомпланарным** (лежащим в разных плоскостях) векторам. $\overline{OM} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = \{x; y; z\}$ Коэффициенты этого разложения x, y и z называются **координатами вектора в пространстве.** Вектор, начало которого совпадает с началом координат, называется **радиус-вектором.** (Рис. 4). Вектор $\overline{OM}\{x; y; z\}$ - радиус-вектор, где x, y и z – это коэффициенты разложения этого вектора по координатным векторам $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$. В данном случае x – это первая координата точки A на оси Ox, y – координата точки B на оси Oy, z – координата точки C на оси Oz. По рисунку видно, что координаты радиус-вектора одновременно являются координатами точки M.

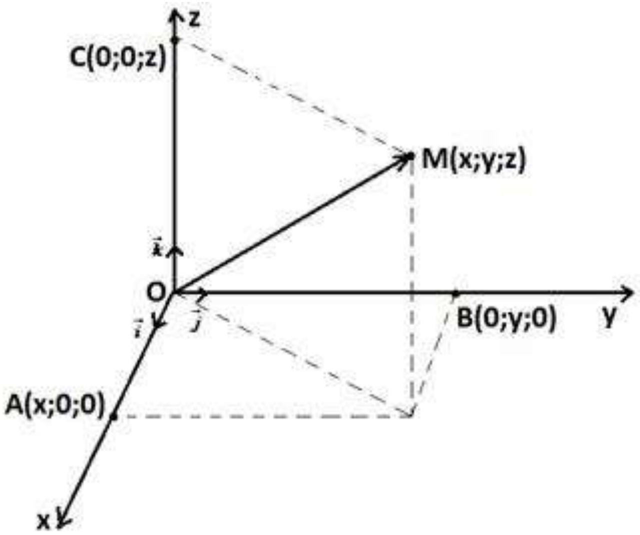

Рис. 4.

Возьмем точку A(x_1;y_1;z_1) и точку B(x_2;y_2;z_2) (см. рис. 5). **Координаты вектора мы можем выразить через координаты конца и начала вектора.** Вектор $\overline{AB}$ находится по формуле: $\overline{AB}\{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$.

Длина отрезка *AB*, находится по формуле: $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

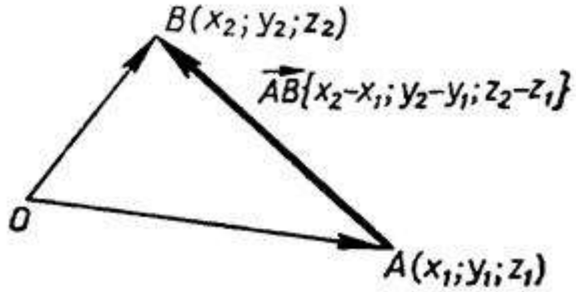

Рис. 5.

Если вектор задаётся тремя координатами $(x_0; y_0; z_0)$, то **длина вектора** $\bar{a}$ находится по формуле: $|\bar{a}| = \sqrt{{x_0}^2 + {y_0}^2 + {z_0}^2}$.

На рис. 6 изображена система координат и две точки $A(x_1; y_1; z_1)$; $B(x_2; y_2; z_2)$. **Координаты точки *M*, которая является серединой отрезка *AB*, находятся по формуле:** $M\left(\frac{x_1+x_2}{2}; \frac{y_1+y_2}{2}; \frac{z_1+z_2}{2}\right)$**.**

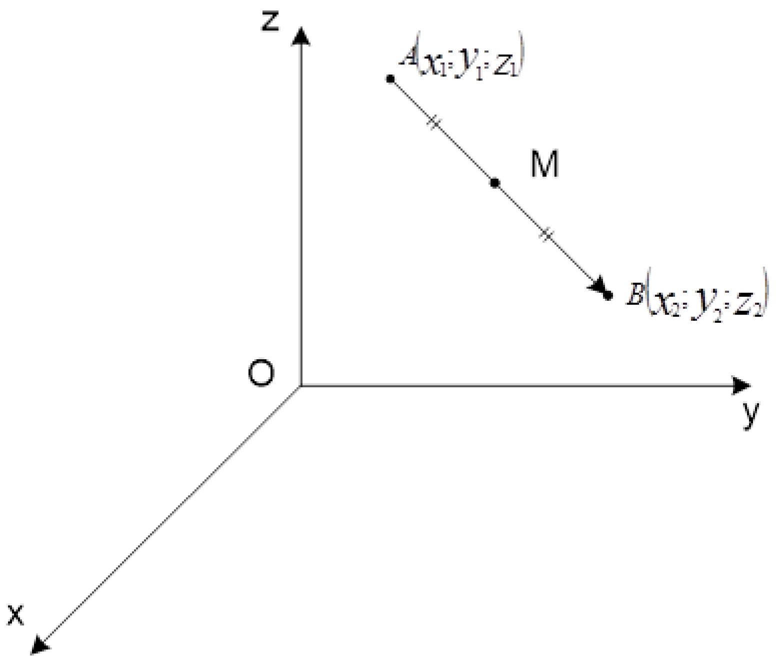

Рис. 6.

3.Действия над векторами с заданными координатами.

Рассмотрим правила, которые позволяют по координатам данных векторов найти координаты их суммы и разности, а также координаты произведения данного вектора на данное число.

$\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\}$; $\vec{b}\{x_2; y_2; z_2\}$

1) Сложение: $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = \{x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2\}$

2) Вычитание: $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = \{x_1 - x_2; y_1 - y_2; z_1 - z_2\}$

3) Умножение на число: $\vec{f} = \lambda\vec{a} = \{\lambda x_1; \lambda y_1; \lambda z_1\}$, $\lambda \in R$

Задача 1.Даны векторы $\vec{a}\{-1;2;0\}$, $\vec{b}\{0;-5;-2\}$, $\vec{c}\{2;1;-3\}$. Найти координаты вектора $\vec{p}=3\vec{b}-2\vec{a}+\vec{c}$. Получаем:

$$\vec{p}=3\vec{b}-2\vec{a}+\vec{c}=3\cdot\{0;-5;-2\}-2\cdot\{-1;2;0\}+\{2;1;-3\}=$$

Теперь умножаем число 3 на каждую координату в скобках, и то же самое делаем с 2: $=\{0;-15;-6\}+\{2;-4;0\}+\{2;1;-3\}=$

У нас получилась сумма трех векторов, складываем их по изученному выше свойству:

$$=\{0+2+2;-15-4+1;-6+0-3\}=$$
$$=\{4;-18;-9\}$$

Ответ: $\vec{p}=\{4;-18;-9\}$

4. Угол между векторами. Скалярное произведение векторов и его свойства.

Отложим от какой-нибудь точки О векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (см. рис. 7). Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не являются сонаправленными, то лучи ОА и ОВ образуют **угол АОВ - угол между векторами, обозначим его** α. Если же векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ - сонаправлены, то будем считать, что угол между ними равен 0°. Если угол между векторами равен 90°, то векторы называются перпендикулярными.

Угол между векторами обозначают так: $\alpha=\angle(\vec{a};\vec{b})=(\widehat{\vec{a};\vec{b}})$.

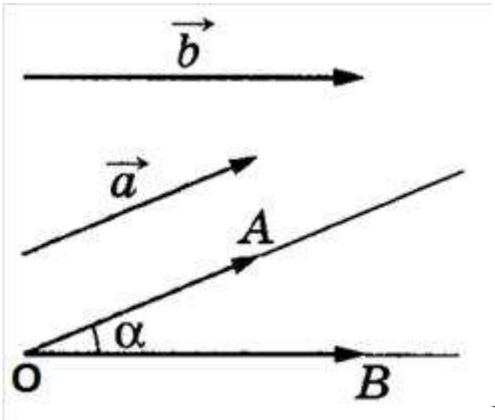

Рис. 7. Угол между векторами

Рассмотрим скалярное произведение двух векторов и выразим его через координаты этих векторов.

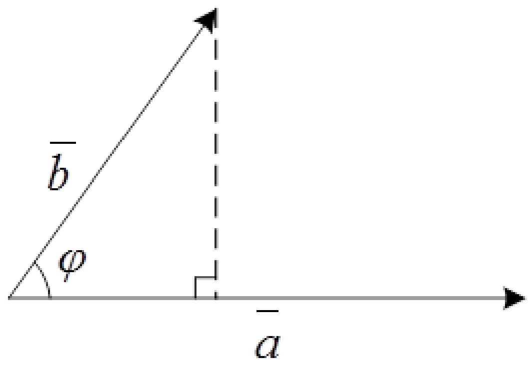

Рис. 8.

Даны два вектора $\bar{a}\{x_1; y_1; z_1\}$, $\bar{b}\{x_2; y_2; z_2\}$. Угол между векторами равен φ (рис. 8). **Скалярным произведением двух векторов** называется произведение их модулей на косинус угла между ними.

$\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos\varphi$

Скалярное произведение через координаты векторов: $\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos\varphi = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$.

Косинус угла между векторами равен:

$$\cos\varphi = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1{}^2 + y_1{}^2 + z_1{}^2} \cdot \sqrt{x_2{}^2 + y_2{}^2 + z_2{}^2}}$$

Проекция вектора $\bar{b}$ на направление $\bar{a}$ равна: $\text{пр.}_{\bar{a}}\bar{b} = |\bar{b}|\cos\varphi = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}|}$.

Основные свойства скалярного произведения векторов:

1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$

2) $\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2 \geq 0$

3) $(\lambda\vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$

4) $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$

Задача 2. Дано: A(0;1;2), B(√2;1;2), C(√2;2;1), D(0;2;1). Доказать: ABCD – квадрат.

Решение:

1) Найдем координаты векторов, длины которых совпадают с длинами сторон четырехугольника. Координаты вектора – это разность координат конца и начала отрезка.

$\overline{AB}\{\sqrt{2}; 0; 0\}$, $\overline{DC}\{\sqrt{2}; 0; 0\}$, $\overline{AD}\{0; 1; -1\}$, $\overline{BC}\{0; 1; -1\}$. По координатам видно, что $AB \parallel DC$, $AD \parallel BC$. Доказано, что ABCD – параллелограмм.

2) Найдем модули эти векторов по формуле: $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Получаем: $\left|\overline{AB}\right| = \left|\overline{DC}\right| = \left|\overline{AD}\right| = \left|\overline{BC}\right| = \sqrt{2}$. Доказано, что ABCD – ромб.

3) Найдем один угол между векторами. $\overline{AB} = \overline{AD} = \sqrt{2} \cdot 0 + 0 \cdot 1 - 1 \cdot 0 = 0 \Rightarrow \angle A = 90$.

Стороны попарно параллельны, стороны равны, и один угол равен 90°, значит остальные углы тоже равны 90°. Следовательно, ABCD – квадрат, что и требовалось доказать.

Контрольные вопросы:

1.Что такое прямоугольная система координат в пространстве?
2.Как найти координаты вектора?
3.Как найти расстояние между точками?
4.Как найти длину вектора?
5.Что такое угол между двумя векторами?
6.Как найти скалярное произведение векторов?