Лекция.

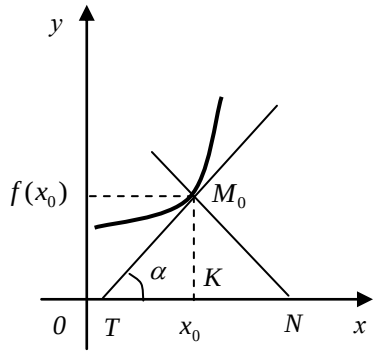
Тема: Геометрический смысл производной. Уравнение касательной и нормали к графику функции.

План

1. Геометрическое содержание производной.
2. Уравнение касательной к графику функции.
3. Уравнение нормали к графику функции.
4. Примеры составления уравнений касательной и нормали.

Производная, особенно ее геометрическое содержание, широко применяются при решении целого ряда задач в разных областях деятельности.

Геометрическое содержание производной



Производная функции $y = f(x)$ для каждого значения x равняется **угловому коэффициенту касательной** к графику функции $y = f(x)$ в соответствующей точке, т.е.

$$f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha ,$$

где α – угол, который образует касательная к графику функции в точке x_0 с положительным направлением оси Ox.

На основе геометрического содержания производной **уравнение касательной к графику функции** $y = f(x)$ записывается таким образом:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \qquad (1)$$

Если непрерывная функция в точке x_0 имеет бесконечную производную, тогда касательной к графику функции в точке $M_0(x_0; y_0)$ является прямая $x = x_0$.

Для **нормали**, т.е. прямой, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0)$, перпендикулярно касательной (прямая M_0N), т. е. **уравнение нормали** имеет вид:

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0), \quad f'(x_0) \neq 0 \quad \text{или} \quad y = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0) \qquad (2)$$

В случае $f'(x_0) = 0$ нормалью будет прямая $x = x_0$; если функция в точке x_0 имеет бесконечную производную, тогда нормалью к кривой будет прямая $y = f(x_0)$.

В некоторых задачах нужно найти угол ϕ между прямыми $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ в их точке пересечения.

Углом ϕ между кривыми считается величина угла ϕ между касательными к данным кривым, в их точке пересечения; $\operatorname{tg}\phi$ вычисляется по формуле:

$$tg\phi = \left| \frac{f_1'(x_0) - f_2'(x_0)}{1 + f_1'(x_0) f_2'(x_0)} \right|, \quad 0 \le \phi \le \frac{\pi}{2}. \qquad (3)$$

Пример 1. Найти уравнение касательной и нормали к кривой $y = x^3 + 2x$ в точке $A(1; 3)$.

Решение. Значение производной данной функции в точке A:

$$y' = 3x^2 + 2; \quad f'(1) = 3 \cdot 1^2 + 2 = 5.$$

Уравнение касательной: $y - 3 = 5(x - 1); \quad 5x - y - 2 = 0.$

Уравнение нормали: $y - 3 = -\frac{1}{5}(x - 1); \quad x + 5y - 16 = 0.$

Контрольные вопросы:

1. В чем состоит геометрический смысл производной?
2. Записать уравнение касательной к графику функции.
3. Записать уравнение нормали к графику функции.
4. Привести примеры составления уравнений касательной и нормали.
5. Записать алгоритм составления уравнения касательной и нормали.

Упражнения:

I) Найти уравнение касательной и нормали к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0.

1). $y = x^2 + \sqrt{x^3}$, $x_0 = 1$. $[7x - 2y - 3 = 0,\ 2x + 7y - 16 = 0]$

2). $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x^2}$, $x_0 = 2$. $[2y - 1 = 0,\ x - 2 = 0]$

II) Найти точки, в которых касательные к графику функции $y = f(x)$ параллельны оси абсцисс:

3). $y = x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 5$. $[(0;-5); (1;-4); (2;-5)]$

III) Написать уравнение касательной и нормали к кривой

4). $y = x^3 - 3x^2 + 9x - 1$ в точке $M(1;6)$. $[6x - y = 0;\ x + 6y - 37 = 0]$