УВАЖАЕМЫЕ СТУДЕНТЫ!

Изучите и законспектируйте новый теоретический материал, обязательно записать примеры и графики.

Решите упражнения для самопроверки к лекции.

Результаты работы, фотоотчет, предоставить преподавателю на e-mail:

xvsviv@rambler.ru в трехдневный срок с момента получения задания.

При возникновении вопросов по приведенному материалу

обращаться по следующим номерам телефонов:072-138-93-11.

ВНИМАНИЕ!!! При отправке работы, не забывайте указывать ФИО студента, наименование дисциплины, дата проведения занятия (по расписанию).

Тема "Уравнение касательной"

Цели занятия:

– Осознание понятия касательной к графику функции в точке, геометрического смысла производной.

– Вывод уравнения касательной; составление алгоритма уравнения касательной к графику функции y = f (x).

– Рассмотрение трех типов задач на нахождение уравнения касательной к графику функции.

– Отработка навыка в составлении уравнения касательной в различных математических ситуациях.

– Развитие логического мышления, исследовательских навыков, функционального мышления, математической речи.

– Выработка коммуникативных навыков в работе, развитие самостоятельной деятельности учащихся.

Задачи занятия:

– Отработать умения и навыки по применению производной;

– Расширять кругозор; развивать математическую речь, внимание, скорость, память, логическое мышление.

– Развивать умения анализировать, обобщать, показывать, использовать элементы исследования.

– Развивать навыки исследовательской работы.

Ход занятия.

Пусть слова, которые вы видите на экране, станут девизом сегодняшнего занятия.

– Плохих идей не бывает

– Мыслите творчески

– Рискуйте

Давайте обсудим, что такое касательная к графику функции?

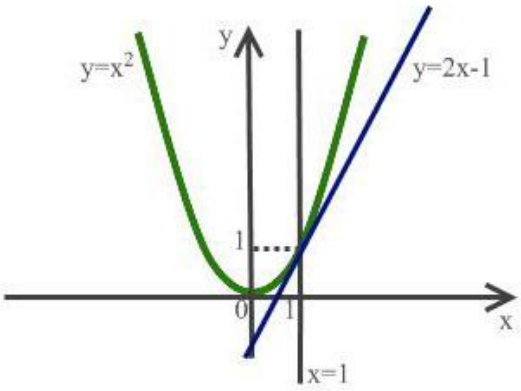
Согласны ли вы с утверждением, что «Касательная – это прямая, имеющая с данной кривой одну общую точку»?

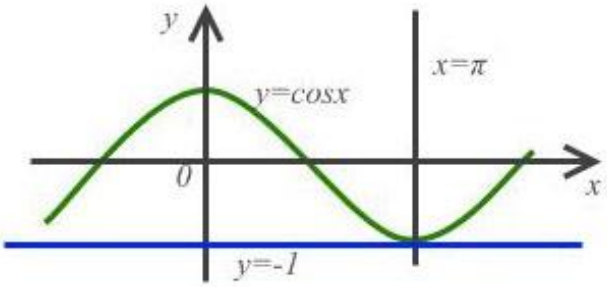
Давайте рассмотрим конкретные примеры:

1) Прямая $x = 1$ имеет с параболой $y = x^2$ одну общую точку (1; 1), однако не является касательной к параболе.

Прямая же $y = 2x - 1$, проходящая через ту же точку, является касательной к данной параболе.

2) Прямая $x = \pi$ не является касательной к графику $y = \cos x$, хотя имеет с ним единственную общую точку (π; 1). С другой стороны, прямая $y = -1$, проходящая через ту же точку, является касательной к графику, хотя имеет с ним бесконечно много общих точек вида ($\pi+2\pi k$; 1), где k – целое число, в каждой из которых она касается графика.





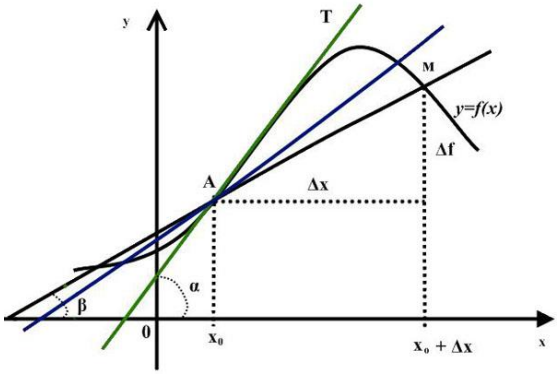
На данном занятии, мы с вами должны понять, что же такое касательная к графику функции в точке, как составить уравнение касательной и рассмотреть основные задачи на составление уравнения касательной.

Посмотрите, чем отличается положение прямой x=1 от положения y=2x-1?

Сделайте вывод, что же такое касательная?

Чтобы задать уравнение прямой на плоскости, нам достаточно знать угловой коэффициент и координаты одной точки.

Начнём с **углового коэффициента**



Примем за определение: касательная — это предельное положение секущей.

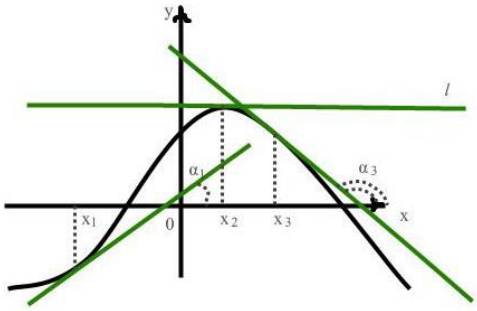
Говорят, что ***касательная есть предельное положение секущей при*** $\Delta x \to 0$.

Существование производной функции в точке x_0 эквивалентно существованию (невертикальной) касательной в точке $(x_0, f(x_0))$ графика, при этом угловой коэффициент касательной равен $f'(x_0)$. В этом состоит ***геометрический смысл производной.***

Определение касательной (записать в тетради)

Касательная к графику дифференцируемой в точке x_0 функции $y = f(x)$ — это прямая, проходящая через точку $(x_0, f(x_0))$ и имеющая угловой коэффициент $f'(x_0)$.

Проведем касательные к графику функции $y = f(x)$ в точках x_1, x_2, x_3, и отметим углы, которые они образуют с положительным направлением оси Ox.



Мы видим, что угол α_1 острый, угол α_3 тупой, а угол α_2 равен нулю, так как прямая *l* параллельна оси Ox. Тангенс острого угла положителен, тупого - отрицателен. Поэтому

$$f'(x_1)>0,\ f'(x_2) = 0,\ f'(x_3) <0.$$

Раз касательная — это прямая линия, а нам нужно составить уравнение касательной, то, что, как вы думаете, нам нужно вспомнить?

Вспомнить общий вид уравнения прямой. (y= кx+b)

Как еще называют число к? (угловой коэффициент или тангенс угла между этой прямой и положительным направлением оси Ox) к = tg α

В чем заключается геометрический смысл производной?

Тангенс угла наклона между касательной и положительным направлением оси Ox

То есть я могу записать $\operatorname{tg} \alpha = y'(x_0)$.

Давайте проиллюстрируем это на чертеже.

Пусть дана функция y = f (x) и точка M, принадлежащая графику этой функции. Давайте определим её координаты следующим образом: x= x_0, y= f (x_0), т.е. M (x_0, f (x_0)) и пусть существует производная f '(x_0), т.е. в данной точке производная определена. Проведем через точку M касательную.

(записать в тетради)

Уравнение касательной – это уравнение прямой, поэтому оно имеет вид: y = kx + b. Следовательно, задача состоит в том, чтобы отыскать k и b. Обратите внимание на доску, из того, что там записано, можно ли найти к? (да, k = f '(x_0).)

Как теперь найти b? Искомая прямая походит через точку M x_0 (; f (x_0)), подставим эти координаты в уравнение прямой: f(x_0) = k x_0 +b , отсюда b = f(x_0) – k x_0,

т. к. к = tg α= y'(x), то b = f(x_0) – f '(x_0) x_0

Подставим значение b и к в уравнение y = kx + b.

y = f '(x_0)x + f(x_0) – f '(x_0) x_0, вынося за скобку общий множитель, получаем:

y = f(x_0) + f '(x_0) · (x- x_0).

Нами получено уравнение касательной к графику функции y = f(x) в точке x = x_0.

(записать в тетеради)

Уравнение касательной к графику функции *f* в точке M(x_0, *f*(x_0)) имеет вид:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Чтобы уверенно решать задачи на касательную, нужно четко понимать смысл каждого элемента в данном уравнении. Давайте ещё раз остановимся на этом:

1. (x_0, f (x_0)) – координаты точки касания

2. f '(x_0) = tg α = к - тангенс угла наклона или угловой коэффициент

3. (x,y) – координаты любой точки касательной

И так мы вывели уравнение касательной, проанализировали смысл каждого элемента в данном уравнении. Зная эту формулу, не нужно каждый раз заново проводить рассуждения по отысканию уравнения касательной. Надо просто найти входящие в неё значения f (x_0) и f'(x_0) и подставить их.

(записать в тетради)

Алгоритм нахождения уравнения касательной в точке (записать в тетради)

1.Найти производную функции

2.Найти значение функции в точке касания

3.Найти значение производной в точке касания

4. Подставить найденные значения в общее уравнение касательной.

Есть **три основных типа задач** на составление уравнения касательной.

1. Дана абсцисса точки касания x_0.

2. Дан угловой коэффициент наклона касательной, то есть значение производной функции в точке x_0.

3. Даны координаты точки, через которую проведена касательная, но которая не является точкой касания.

Рассмотрим каждый тип задач.

Пример 1. Составить уравнение касательной к графику функции $f(x) = x^2 - 3x + 5$ в точке с абсциссой $x_0 = -1$.

Решение:

Составим уравнение касательной (по алгоритму).

1. $(x_0) = -1$;

2. $f(x_0) = f(-1) = 1 + 3 + 5 = 9$;

3. $f'(x_0) = 2x – 3$,

4. $f'(x_0) = f'(-1) = -2 – 3 = -5$;

5. $y = 9 – 5 \cdot (x + 1)$, $\boldsymbol{y = 4 – 5x}$.

Ответ: $y = 4 – 5x$.

Пример 2. Дана функция $f(x)=x^3+3x^2-2x-2$. Напишите уравнение касательной к графику функции $y=f(x)$, параллельной прямой $y=-2x+1$.

Решение. Производная данной функции существует для любого x из R. Найдем ее:

$(f(x))' = (x^3+3x^2 - 2x - 2) = 3 + 6x - 2.$

Поскольку касательная параллельна y = -2x + 1, получим уравнение:

$3 + 6x - 2 = -2;$

$x + 2x = 0;$

$x \cdot (x + 2) = 0;$

$x_1 = 0; x_2 = -2.$

Подставим x_1 и в уравнение функции и найдем y_1 и y_2 .

$y_1 = (1 + 3 - 2 - 2) = 0;$

$y_2 = (-8 + 12 + 4 - 2) = 6.$

Подставляем найденные координаты в уравнение касательной и вычислив, получим:

$y = -2x; y = -2x +10.$

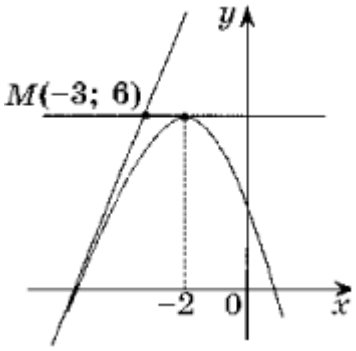
Ответ: $y = -2x; y = -2x +10.$

Пример 3. Напишите уравнения всех касательных к графику функции $y = – x^2 – 4x + 2$, проходящих через точку M(– 3; 6).

Решение. Точка M(– 3; 6) не принадлежит графику функции, так как $f(– 3) \neq 6$

x_0 – абсцисса точки касания. $f(x_0) = – x_0^2 – 4 x_0 + 2.$

Производная данной функции существует для любого x из R. Найдем ее:



$f'(x) = – 2x – 4, f'(x_0) = – 2 x_0 – 4.$

$y = – y=x_0^2 – 4 x_0 + 2 – 2(x_0 + 2)(x_0 – a)$ – уравнение касательной.

Касательная проходит через точку M(– 3; 6), следовательно, ее координаты удовлетворяют уравнению касательной.

$6 = – x_0^2 – 4 x_0 + 2 – 2(x_0 + 2)(– 3 – x_0),$

$x_0^2 + 6 x_0 + 8 = 0; x_{0\,1} = – 4, x_{02} = – 2.$ Это значит, что через точку M можно провести две касательные к графику функции.

Если $x_0 = -4$, то уравнение касательной имеет вид y = 4x + 18.

Если $x_0 = -2$, то уравнение касательной имеет вид y = 6.

Ответ: y = 4x + 18; y = 6

6. Самостоятельная работа с самопроверкой

Напишите уравнение касательной к графику функции y=f(x) в точке с абсциссой a.

Задание 1

$f(x) = x^2 + x + 1$, a=1

Задание 2

$f(x) = x - 3x^2$, a=2

Ответы: задание 1: y=3x; задание 2: y= -11x+12

Контрольные вопросы к лекции:

- что называется касательной к графику функции в точке?
- в чём заключается геометрический смысл производной?
- сформулируйте алгоритм нахождения уравнения касательной в точке.

Рефлексия деятельности на занятии.

Выберете результат, соответствующий вашему настроению и состоянию после проведенного урока. Спасибо за урок.