Задание:

- Изучить теорию;
- Написать краткий конспект;
- Разобрать примеры решения;
- Ответить на вопросы;
- По вопросам обращаться 072-1098278 или hvastov@rambler.ru
- Фотоотчёт конспекта прислать в течении 3 дней со дня получения задания на hvastov@rambler.ru

Тема: Действия над комплексными числами в тригонометрической форме.

(несколько занятий)

План.

1. Умножение комплексных чисел заданных в тригонометрической форме
2. Деление комплексных чисел заданных в тригонометрической форме
3. Возведение в степень комплексных чисел заданных в тригонометрической форме
4. Извлечение корня из комплексных чисел заданных в тригонометрической форме

1. Тригонометрическая запись комплексных чисел.

Комплексное число $z = a + bi$ можно задать с помощью радиус – вектора $\bar{r} = \overline{OM}$ с координатами (a; b) (рис.1).

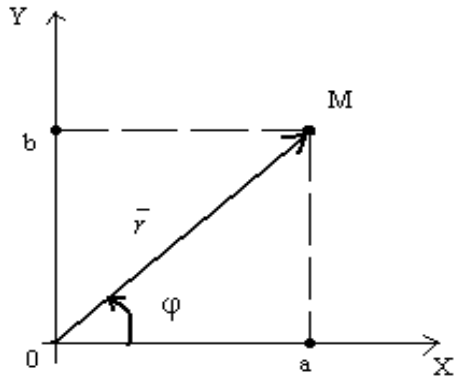

Рисунок 1

Из прямоугольного треугольника имеем: $a = r \cdot \cos\varphi$, $b = r \cdot \sin\varphi$.

Следовательно, комплексное число $z = a + bi$ можно записать в виде:

$z = r \cdot \cos\varphi + i\, r \cdot \sin\varphi$ или $z = r \cdot (\cos\varphi + i \sin\varphi)$.

Такая запись комплексного числа $z = r \cdot (\cos\varphi + i \sin\varphi)$ называется тригонометрической формой комплексного числа.

Определение. Длина вектора $\bar{r}$, изображающего комплексное число z, называется модулем этого числа и обозначается $|z|$ или r.

Для любого комплексного числа z его модуль $r = |z|$ определяется однозначно по формуле $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Определение. Величина угла между положительным направлением действительной оси и вектором $\bar{r}$, изображающим комплексное число, называется аргументом этого комплексного числа и обозначается Arg z или φ.

Значение аргумента, взятое в пределах от 0 до 2π, называется главным. Его можно определить из равенства $\operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{a}$. По знакам a и b можно установить, в какой четверти находиться угол α, и по значению tg α, используя таблицу тангенсов, найти величину угла α.

Пример 1. Найти аргументы комплексных чисел.

1) $z = -12+12\sqrt{3}\,i$;

Имеем: a = -12, $b = 12\sqrt{3}$, тогда $\operatorname{tg}\alpha = 12\sqrt{3}:(-12) = -3$. То есть радиус-вектор, соответствующий данному комплексному числу, лежит во II четверти. Значит $\alpha = \frac{2\pi}{3}$.

2) $z = -4 - 4i$;

Имеем: tg α = 1, радиус-вектор, соответствующий данному комплексному числу, лежит в III четверти. Значит, $\alpha = \frac{5\pi}{4}$.

3) $z = 5-5\sqrt{3}\,i$;

Имеем: $\operatorname{tg}\alpha = -\sqrt{3}$, a = 5, $b = -5\sqrt{3}$, радиус-вектор, соответствующий данному комплексному числу, лежит в IV четверти. Значит, $\alpha = \frac{5\pi}{3}$.

Пример 2. Представить в тригонометрической форме комплексное число 1– i.

Решение. a = 1, b = -1.

$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}.$

$$\cos\varphi = \frac{a}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\sin\varphi = \frac{b}{r} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$ \

$\varphi = \frac{7}{4}\pi$, $1 - i = \sqrt{2}\ (\cos\frac{7}{4}\pi + i\sin\frac{7}{4}\pi)$.

2. Переход от алгебраической формы комплексного числа в тригонометрическую и наоборот.

$r = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\quad$ tg $\alpha = \frac{b}{a}$, $\quad$ cos $\alpha = \frac{a}{r}$, $\quad$ sin $\alpha = \frac{b}{r}$.

Пример11. Перевести из алгебраической формы в тригонометрическую: а) $z = -1-\sqrt{3}$ í;

Решение. Имеем $r = \sqrt{(-1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 2$; $\quad$ tg $\alpha = \sqrt{3}$; $\quad \alpha = \frac{4\pi}{3}$

Так как $z = a + b$í находится в III ч., то $\alpha = \frac{4\pi}{3}$.

Следовательно, $-1-\sqrt{3}$ í $= 2(\cos\frac{4\pi}{3} +$ í $\sin\frac{4\pi}{3})$.

б) z = í;

Решение. Имеем a = 0, b = 1,значит, r = 1. Тогда í = $\cos\frac{\pi}{2} +$ í $\sin\frac{\pi}{2}$.

в) z = 3.

Решение. Имеем a = 3, b = 0, значит, r = 3. Следовательно, 3 = 3(cos 0 + í sin 0).

Переход от тригонометрической формы в алгебраическую.

Пример 12. а) $2(\cos\frac{\pi}{3} +$ í $\sin\frac{\pi}{3})$, $\qquad$ б) $4(\cos\frac{2\pi}{3} +$ í $\sin\frac{2\pi}{3})$.

а) $2(\cos\frac{\pi}{3} +$ í $\sin\frac{\pi}{3}) = 2(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) = 1 + \sqrt{3}$ í;

б) $4(\cos\frac{2\pi}{3} +$ í $\sin\frac{2\pi}{3}) = 4\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -2 + 2\sqrt{3}$ í.

3. Действия над комплексными числами в тригонометрической форме.

Над комплексными числами в тригонометрической форме выполняются действия: умножение, деление, возведение в степень и извлечение корня.

1) Умножение.

Пусть $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ та $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$.получаем:

$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$, то есть при умножении - модули перемножаем, а аргументы складываем.

Пример 3. Найти произведение комплексных чисел $z_1 = 2\cos 50^o + 2 i \sin 50^o$, $z_2 = \cos 40^o + i \sin 40^o$.

Решение. Тригонометрические формы этих чисел имеют вид:

$z_1 = 2 \cdot (\cos 50^o + i \sin 50^o)$, $z_2 = 1 \cdot (\cos 40^o + i \sin 40^o)$.

Тогда $z_1 \cdot z_2 = 1 \cdot 2 \cdot (\cos(50^o + 40^o) + i \sin(50^o + 40^o)) = 2(\cos 90^o + i \sin 90^o) = 2(0 + i) = 2i$.

Пример 4. Найти произведение комплексных чисел $z_1 = 12(\cos 225° + i\sin 225°)$ и $z_2 = \frac{3}{2}(\cos 75° + i\sin 75°)$.

Решение. $z_1 \cdot z_2 = 12 \cdot \frac{3}{2}(\cos(225° + 75°) + i\sin(225° + 75°)) =$

$= 18(\cos 300° + i\sin 300°) = 18\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 9 - 9i\sqrt{3}.$

2) Деление.

Если $z_1 = r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$, $z_2 = r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$, причем $z_1 \neq 0$, то комплексное число

$y = \frac{z_2}{z_1} = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)$ $[\cos(\varphi_2 - \varphi_1) + i \sin(\varphi_2 - \varphi_1)]$ является частным чисел z_1 и z_2, то есть при делении – модули делим, а аргументы вычитаем.

Пример 5. Найти частное комплексных чисел $z_1 = 2\cos 50^o + 2 i \sin 50^o$, $z_2 = \cos 40^o + i \sin 40^o$.

Решение. Тригонометрические формы этих чисел имеют вид:

$z_1 = 2 \cdot (\cos 50^o + i \sin 50^o)$, $z_2 = 1 \cdot (\cos 40^o + i \sin 40^o)$.

Тогда $\frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{1}(\cos(50^o - 40^o) + i \sin(50^o - 40^o)) = 2(\cos 10^o + i \sin 10^o)$.

Пример 6. $z_1 = 12(\cos 225° + i\sin 225°)$, $z_2 = \frac{3}{2}(\cos 75° + i\sin 75°)$.

Решение. $\frac{z_1}{z_2} = 12 \div \frac{3}{2}\left(\cos(225° - 75°) + i\sin(225° - 75°)\right) =$

$= 8(\cos 150° + i\sin 150°) = 8\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = -4\sqrt{3} + 4i$

3) Возведение в степень.

Определение. n – ой степенью комплексного числа z называется комплексное число, получающееся в результате умножения числа z самого на себя n раз.

$$\underbrace{z \cdot z \cdot z \cdot \ldots \cdot z}_{n..сомножителей} = z^n$$

Число z называется основанием степени, а натуральное число n – показателем степени.

Возвести комплексное число в n – ую степень можно по формуле:

$z^n = (r^n)[\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)]$ - формулой Муавра, то есть модуль возвести в n – ую степень, а аргумент умножить на n.

Пример 7. Возвести в степень $z = \left(2(\cos 24° + i\sin 24°)\right)^5$.

Пример 8.Вычислите $(1 + i)^{100}$.

Решение. Запишем комплексное число 1 + i в тригонометрической форме.

a = 1, b = 1.

$r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$.

$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

$(1+i)^{100} = [\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})]^{100} = (\sqrt{2})^{100}(\cos\frac{\pi}{4}\cdot 100 + i\sin\frac{\pi}{4}\cdot 100) = 2^{50}(\cos 25\pi + i\sin 25\pi) = 2^{50}(\cos\pi + i\sin\pi) = -2^{50}$.

Пример 9.Вычислите $\left(\sqrt{3} - i\right)^{10}$.

Решение. Запишем комплексное число $\sqrt{3} - i$ в тригонометрической форме.

$r = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2} = 2; a = arctg\left|\frac{-1}{\sqrt{3}}\right| = \frac{\pi}{6}; \varphi = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6} = 330°.$

Тогда $\sqrt{3} - i = 2(\cos 330° + i\sin 330°)$,

$$\left(\sqrt{3}-i\right)^{10}=\left(2\left(\cos 330^\circ+i\sin 330^\circ\right)\right)^{10}=2^{10}\left(\cos 10\cdot 330^\circ+i\sin 10\cdot 330^\circ\right)=$$

$$=2^{10}\cdot\left(\cos\left(60^\circ+9\cdot 360^\circ\right)+i\sin\left(60^\circ+9\cdot 360^\circ\right)\right)=2^{10}\cdot\left(\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ\right)=1024\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=512+512\sqrt{3}i.$$

4) Извлечение квадратного корня из комплексного числа.

$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r\left(\cos\varphi+i\sin\varphi\right)}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)$, $k=0;1;2;\ .n-1$. Пример 10 . Вычислите $\sqrt[4]{-81}$. Записать ответ в алгебраической и тригонометрической форме.

Запишем в тригонометрической форме $-81=81\left(\cos\pi+i\sin\pi\right)$. Тогда $\sqrt[4]{-81}=\sqrt[4]{81}\left(\cos\frac{\pi+2\pi k}{4}+i\sin\frac{\pi+2\pi k}{4}\right), k=0,1.2,3.$ При $k=0$

$$z_0=3\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi\cdot 0}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi\cdot 0}{2}\right)\right)=3\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{3\sqrt{2}}{2}+i\frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

При $k=1$ $$z_1=3\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)\right)=3\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{3\sqrt{2}}{2}+i\frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

При $k=2$ $$z_2=3\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\pi\right)\right)=3\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{3\sqrt{2}}{2}-i\frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

При $k=3$ $$z_3=3\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{3\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{3\pi}{2}\right)\right)=3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{3\sqrt{2}}{2}-i\frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Контрольные вопросы.

1) Дайте определение комплексного числа.

2) Как изображаются комплексные числа геометрически?

3) Дайте определение модуля и аргумента комплексного числа.

4) Как выполняются действия над комплексными числами, заданными в тригонометрической форме?

5) Найдите модуль и аргумент комплексного числа z = -2+2i$\sqrt{3}$.

6) Запишите в тригонометрической форме комплексные числа:

а) $z=-\sqrt{3}+i$; в) $z=-1+i\sqrt{3}$; с) $z=-2i$

7) Выполните действия в тригонометрической форме.

А) $4(\cos 220^0 + i \sin 220^0)\cdot 1{,}5(\cos 20^0 + i \sin 20^0)$

Б) $3(\cos 280^0 + i \sin 280^0) : \frac{3}{4}(\cos 70^0 + i \sin 70^0)$

В) $(2(\cos 50^0 + i \sin 50^0))^6$

Г) $3(\cos 340^0 + i \sin 340^0) : \frac{3}{8}(\cos 25^0 + i \sin 25^0)$