Уважаемые студенты

Вам необходимо выполнить задание:

1. Внимательно изучить теоретический материал.

2. Решить задачи к лекции.

3. Выполненное задание предоставить на проверку в виде фотоотчета в трехдневный срок на email: xvsviv@rambler.ru

С уважением Светлана Ивановна Хвастова. Если возникнут вопросы, обращаться по телефону: +79591389311 (ватсап, телеграмм).

Применение производной к исследованию функций.

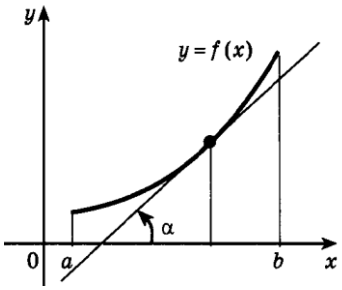
Возрастание и убывание функции.

Производная широко используется для исследования функций, т.е. для изучения различных свойств функций. Рассмотрим применение производной к нахождению *промежутков возрастания и убывания функций.*

Определение: Функция $y = f(x)$ называется ***возрастающей*** на некотором промежутке, если для любых чисел x_1 и x_2 из этого промежутка выполняется условие, что если $x_1<x_2$, то $f(x_1)<f(x_2)$. Другими словами большему аргументу соответствует большее значение функции.

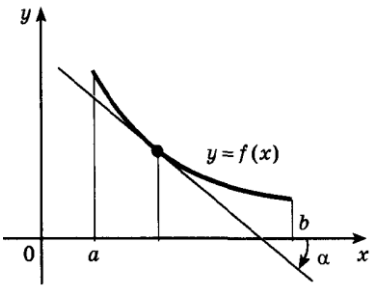
Функция $y = f(x)$ называется ***убывающей*** на некотором промежутке, если для любых чисел x_1 и x_2 из этого промежутка выполняется условие, что если $x_1< x_2$, то $f(x_1)> f(x_2)$. Другими словами большему аргументу соответствует меньшее значение функции.

Возрастание и убывание функции $y = f(x)$ характеризуется *знаком ее производной*



Пусть значения производной функции $y = f(x)$ положительны на некотором промежутке, т.е. $f'(x) > 0$. Тогда *угловой коэффициент касательно*й $tg\ \alpha = f'(x)$ к графику этой функции в каждой точке данного промежутка положителен. Это означает, что

касательная образует острый угол с осью ***Ox,*** и поэтому график функции на этом промежутке «поднимается», т.е.функция ***f(x)*** *возрастает.*



Если $f'(x) < 0$ на некотором промежутке, то *угловой коэффициент касательной* $tg\ \alpha = f'(x)$ к графику функции $y = f(x)$ отрицателен. Это означает, что касательная образует тупой угол с осью ***Ox,*** и поэтому график функции на этом промежутке «опускается», т.е. функция $f(x)$ *убывает.*

!!! Итак, ***если f'(x) > 0 на промежутке, то функция f (x) возрастает на этом промежутке. Если f'(x) < 0 на промежутке, то функция f (x) убывает на этом промежутке.***

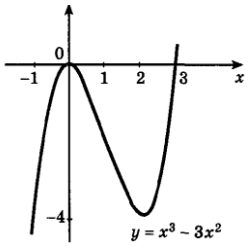
Задача 1. Доказать, что функция $f(x) = x + \frac{1}{x}$ возрастает на промежутке $(1; +\infty)$

Решение. Найдем производную $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2}$. Если $x > 1$, то $\frac{x^2-1}{x^2} > 0$, т.е. $f'(x) > 0$

при $x > 1$, и поэтому данная функция возрастает на промежутке $(1; +\infty)$.

Определение: Если функция только убывает или только возрастает, то такая функция называется ***монотонной***. Промежутки, на которых функция только возрастает или только убывает, называются ***промежутками монотонности*** этой функции.

Исследовать функцию на монотонность – это, значит, выяснить, на каких промежутках области определения функция возрастает, а на каких убывает.

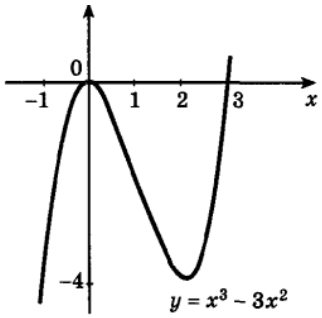


Задача 2. Найти *интервалы монотонности* функции $f(x) = x^3 - 3x^2$.

Решение. Найдем производную: $f'(x) = 3x^2 - 6x$. Решая неравенство $f'(x) > 0$, т.е. неравенство $3x^2 - 6x > 0$, находим *интервалы возрастания:* $x < 0$, $x > 2$. Решая неравенство $f'(x) < 0$, т.е. неравенство $3x^2 - 6x < 0$, находим *интервал убывания:* $0 < x < 2$.

График функции $y = 3x^2 - 6x$ изображен на рисунке. Из рисунка видно, что функция $y = 3x^2 - 6x$ возрастает не только на интервалах $x < 0$ и $x > 2$, но и на промежутках $x \le 0$, $x \ge 2$; убывает не только на интервале $0 < x < 2$, ***но и на отрезке*** $0 \le x \le 2$.

Экстремумы функции



На рис.- график функции $y = x^3 - 3x^2$. Рассмотрим ***окрестность точки*** $x = 0$, т.е. некоторый интервал, содержащий эту точку. Как видно из рис., существует такая окрестность точки $x = 0$, что наибольшее значение функция $x^3 - 3x^2$ в этой окрестности принимает в точке $x = 0$. *Например*, на интервале $(-1; 1)$ наибольшее значение, равное 0 функция принимает в точке $x = 0$. Точку $x = 0$ называют *точкой максимуму этой функции.*

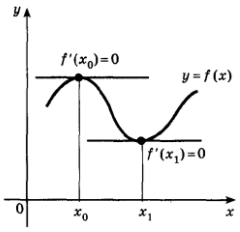
Аналогично точку $x = 2$ называют *точкой минимума функции* $x^3 - 3x^2$, так как значение функции в этой точке меньше ее значения в любой точке некоторой окрестности точки $x = 2$, *например* окрестности $(1{,}5; 2{,}5)$.

!!! Точка x_0 называется ***точкой максимума (минимума) функции*** $f(x)$, если существует такая *окрестность точки* x_0 ,что для всех $x \ne x_0$ из этой окрестности ***выполняется неравенство***

$f(x) < f(x_0)$ $(f(x) > f(x_0))$ (максимум и минимум в данном случае являются локальными).

!!! Максимум *и* ***минимум функции*** объединены общим названием: ***экстремум функции***, а ***точки максимума и минимума*** называют ***точками экстремума.***

Рассмотрим функцию $f(x)$, которая определена в некоторой окрестности точки x_0 и имеет производную в этой точке.



Теорема. Если x_0 ***– точка экстремума дифференцируемой функции*** $f(x)$, ***то*** $f'(x_0) = 0$. Это утверждение называют ***теоремой Ферма.***

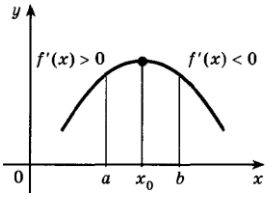
Теорема ***Ферма*** имеет наглядный ***геометрический смысл: касательная*** к графику функции $y = f(x)$ в точке $(x_0; f(x_0))$, где x_0 – *точка экстремума функции* $y = f(x)$ ***параллельна оси абсцисс,*** и поэтому *ее угловой коэффициент* $f'(x_0)$ ***равен нулю.***

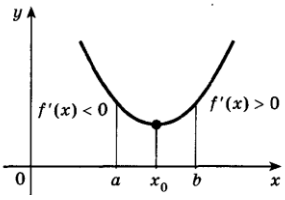
Отметим, что если $f'(x_0) = 0$, то этого *недостаточно*, чтобы утверждать, что x_0 обязательно *точка экстремума* функции $f(x)$. *Например*, если $f(x)= x^3$, то $f'(0)= 0$. Однако точка $x =0$ **не** является *точкой экстремума*, т.к. функция x^3,возрастает на всей числовой оси.

Определение: ***Точки, в которых производная функции равна нулю***, называются ***стационарными. Точки, в которых производная равна нулю*** или ***недифференцируема*** (производная не существует) называются ***критическими***.

Таким образом, ***для того чтобы точка x_0 была точкой экстремума функции $f(x)$, необходимо, чтобы эта точка была критической точкой данной функции.***

Сформулируем ***достаточные условия*** того, что ***стационарная точка*** является ***точкой экстремума***.





Теорема. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на интервале $(a; b)$, $x_0 \in (a; b)$, и $f'(x_0) = 0$.

Тогда: **1**) если при переходе через *стационарную точку* x_0 функции $f(x)$ ее производная меняет знак с «плюса» на «минус», т.е. $f'(x)>0$ слева от точки x_0 и $f'(x)<0$ справа от точки x_0, то x_0 – ***точка максимума функции*** (рис.)

2) если при переходе через *стационарную точку* x_0 функции $f(x)$ ее производная меняет знак с «минуса» на «плюс», то x_0 – ***точка минимума функции*** (рис.)

3) если при переходе через *стационарную точку* x_0 функции $f(x)$ ее производная ***не*** меняет знак, то эта точка ***не*** является *точкой экстремума.*

Алгоритм нахождения точек экстремума функции.

1.Найти производную $f'(x)$. **2**. Решив уравнение $f'(x) = 0$, найти *стационарные точки* функции.

3.Отметить *стационарные точки* на числовой прямой.

4.Определить знак производной $f'(x)$ в полученных промежутках.

5. Опираясь на теорему о <u>*достаточных условиях экстремума*</u> функции, сделать выводы о наличии или отсутствии точек *экстремума* функции.

.Решение задач по теме «Возрастание и убывание функции. Экстремумы функции»

Упражнения

899 Доказать, что функция $f(x) = x^2 + \frac{2}{x}$ возрастает на промежутке $x > 1$, убывает на промежутках $x < 0$ и $0 < x < 1$.

900 Найти интервалы возрастания и убывания функции:

1) $y = x^2 - x$; 2) $y = 5x^2 - 3x - 1$;
3) $y = x^2 - 2x$; 4) $y = x^2 + 12x - 100$;
5) $y = x^3 - 3x$; 6) $y = x^4 - 2x^2$;
7) $y = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 40$; 8) $y = x^3 - 6x^2 + 9$.

Найти интервалы возрастания и убывания функции (902—905).

902 1) $y = \frac{1}{x+2}$; 2) $y = 1 + \frac{2}{x}$; 3) $y = -\sqrt{x-3}$; 4) $y = 1 + 3\sqrt{x-5}$.

903 1) $y = \frac{x^3}{x^2+3}$; 2) $y = \frac{(x-2)(8-x)}{x^2}$;
3) $y = (x-1)e^{3x}$; 4) $y = xe^{-3x}$.

904 1) $y = e^{x^2-3x}$; 2) $y = 3^{x^2-x}$.

905 1) $y = x - \sin 2x$; 2) $y = 3x + 2\cos 3x$.

<u>Задача</u> 1.Найти точки экстремума функции $f(x) = x^4 - 4x^3$.

Решение. Найдем производную:

$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x-3)$. Найдем <u>*стационарные*</u> точки: $4x^2(x-3) = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 3$.

Методом *интервалов* устанавливаем, что производная $f'(x) = 4x^2(x-3)$ положительна при $x > 3$,

отрицательна при $x < 0$ и при $0 < x < 3$. Так как при переходе через точку $x_1 = 0$ знак производной не меняется, то эта точка не является точкой экстремума. При переходе через точку $x_2 = 3$ производная меняет знак с « - » на « + ». Поэтому $x_2 = 3$ – *точка минимума.*

Задание. Исследовать функцию $y(x) = x^4 - 1$ на экстремум.

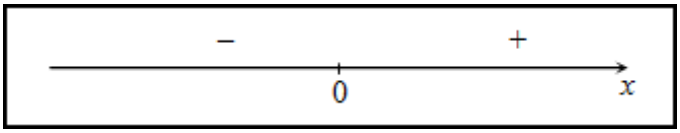
Решение. Находим производную заданной функции:

$y' = (x^4 - 1)' = 4x^3$

Далее ищем критические точки функции, для этого решаем уравнение $y'(x) = 0$:

$y' = 4x^3 = 0 \Rightarrow x = 0$

Первая производная определена во всех точках. Таким образом, имеем одну критическую точку $x = 0$. Наносим эту точку на координатную прямую и исследуем знак производной слева и справа от этой точки (для этого из каждого промежутка берем произвольное значение и находим значение производной в выбранной точке, определяем знак полученной величины):



Так как при переходе через точку $x = 0$ производная сменила свой знак с "-" на "+", то в этой точке функция достигает минимума (или минимального значения), причем $y_{\min} = y(0) = 0^4 - 1 = -1$.

Замечание. Также можно определить интервалы монотонности функции: так как на интервале $(-\infty; 0)$ производная $y'(x) < 0$, то на этом интервале функция $y(x) = x^4 - 1$ является убывающей; на интервале $(0; +\infty)$ производная $y'(x) > 0$, значит заданная функция возрастает на нем.

Ответ. $y_{\min} = y(0) = -1$

Переход от возрастания к убыванию и обратно возможен лишь ***в точках, при переходе через которые, производная меняет свой знак***. Такими точками являются те, *в которых производная равна нулю или не существует*.

Определение: ***Точки, в которых производная функции равна нулю***, называются ***стационарными. Точки, в которых производная равна нулю*** или ***недифференцируема*** (производная не существует) называются ***критическими***.

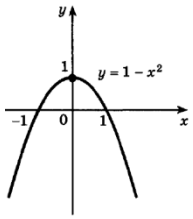
Порядок нахождения промежутков монотонности:

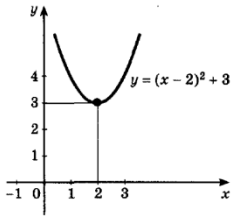
1.Найти область определения функции.

2.Найти первую производную функции.

3.Найти критические точки, исследовать знак первой производной в промежутках, на которые найденные критические точки делят область определения функции.

Экстремумы функции. Пусть графики некоторой функций имеют вот такой вид:





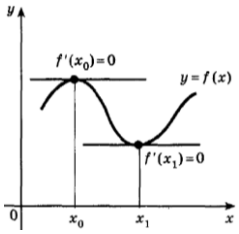
Определение: Точка x_0 называется точкой ***минимума*** (***максимума***) функции $y = f(x)$, если в некоторой окрестности точки x_0 выполняется неравенство $f(x) \geq f(x_0)$ $(f(x) \leq f(x_0))$.

Следует иметь в виду, что максимум и минимум в данном случае являются локальными.

Максимум и ***минимум функции*** объединены общим названием: ***экстремум функции***, а *точки максимума и минимума* называют *точками экстремума*.

При каких же условиях функция имеет экстремум? Видно, что точка максимума служит *границей перехода от возрастания к убыванию функции*, а точка минимума - *от убывания к возрастанию.*

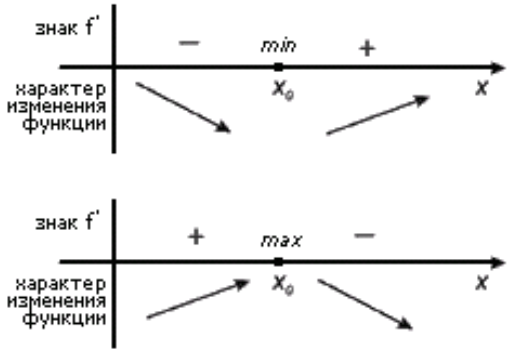
Необходимое условие *существования экстремума функции в точке:* Если x_0



– точка экстремума функции ***f(x),*** и в этой точке функция дифференцируема, *то производная в этой точке равна нулю* (точками экстремума могут служить лишь ***критические точки***, в которых производная равна нулю или не существует).

Необходимое условие ***не*** является достаточным, т.е. из того факта, что производная равна нулю в некоторой точке, не следует, что функция в этой точке имеет экстремум.

Достаточное условие ***экстремума***: ***Если при переходе через точку*** x_0 *(критическую)* ***производная функции меняет знак, то*** x_0 ***– точка экстремума функции f(x)*** (с "+" на "-" для максимума, а для минимума с "-" на "+").



Если при переходе через критическую точку смены знака производной не происходит, то в данной точке *экстремума* ***нет***

.