УВАЖАЕМЫЕ СТУДЕНТЫ!

Изучите и законспектируйте новый теоретический материал тезисно по плану лекции, сопровождая конспект записями примеров.

Подготовьте письменные ответы к заданиям к лекции.

Результаты работы, фотоотчет, предоставить преподавателю на e-mail: xvsviv@rambler.ru в трехдневный срок с момента получения задания.

При возникновении вопросов по приведенному материалу обращаться по следующим номерам телефонов:072-138-93-11.

ВНИМАНИЕ!!! При отправке работы, не забывайте указывать ФИО студента, наименование дисциплины, дата проведения занятия (по расписанию).

ЛЕКЦИЯ 2

План

1. Изучение законов логики. Равносильные преобразования.

2. Операции на множестве высказываний

3. Формулы алгебры логики

1. Изучение законов логики. Равносильные преобразования.

Законы логики (свойства логических операций)

Следующие формулы являются законами логики.

1. $\overline{\overline{A}} = A$ - закон двойного отрицания.
2. $A \wedge B \leftrightarrow B \wedge A$ - закон коммутативности конъюнкции.
3. $A \vee B \leftrightarrow B \vee A$ - закон коммутативности дизъюнкции.
4. $(A \wedge B) \wedge C \leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$ - закон ассоциативности конъюнкции.
5. $(A \vee B) \vee C \leftrightarrow A \vee (B \vee C)$ - закон ассоциативности дизъюнкции.
6. $A \wedge (B \vee C) \leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ - закон дистрибутивности конъюнкции относительно дизъюнкции.

7. $A \vee (B \wedge C) \leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ - закон дистрибутивности дизъюнкции относительно конъюнкции.

8. $\overline{A \vee B} \leftrightarrow \overline{A} \wedge \overline{B}$ - закон отрицания дизъюнкции.

9. $\overline{A \wedge B} \leftrightarrow \overline{A} \vee \overline{B}$ - закон отрицания конъюнкции.

10. $\overline{A \to B} \leftrightarrow A \wedge \overline{B}$ - закон отрицания импликации.

11. $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow ((A \to B) \wedge (B \to A))$ - закон выражения эквивалентности через конъюнкцию и импликацию.

12. $(A \to B) \leftrightarrow (\overline{B} \to \overline{A})$ - закон контрапозиции.

13. $((A \to B) \wedge (B \to C)) \to (A \to C)$ - закон силлогизма.

Для доказательства любого из приведенных выше законов можно использовать следующие способы:

1. Построить таблицы истинности для левых и правых частей эквивалентности и убедиться, что получены одинаковые значения для всех значений атомов.

2. Построить значение всей формулы и убедится, что формула является тавтологией.

Пример. Докажем закон отрицания конъюнкции ($\overline{A \wedge B} \leftrightarrow \overline{A} \vee \overline{B}$) этими способами:

1. Найдем значения для $\overline{A \wedge B}$ и $\overline{A} \vee \overline{B}$ и сравним их.

A	**B**	$A \wedge B$	$\overline{A \wedge B}$	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A} \vee \overline{B}$
И	И	И	**Л**	Л	Л	**Л**
И	Л	Л	**И**	Л	И	**И**
Л	И	Л	**И**	И	Л	**И**
Л	Л	Л	**И**	И	И	**И**

2. Найдем значение $\overline{A \wedge B} \leftrightarrow \overline{A} \vee \overline{B}$ и убедимся, что при всех значениях A и B - это истинное значение.

A	**B**	$A \wedge B$	$\overline{A \wedge B}$	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A} \vee \overline{B}$	$\overline{A \wedge B} \leftrightarrow \overline{A} \vee \overline{B}$
И	И	И	Л	Л	Л	Л	**И**
И	Л	Л	И	Л	И	И	**И**
Л	И	Л	И	И	Л	И	**И**
Л	Л	Л	И	И	И	И	**И**

Логическое следствие

Определение. Формула B есть ***логическое следствие*** формул A_1, A_2, .., A_n, если формула B принимает истинное значение при тех же значениях, при которых истинна каждая из формул A_1, A_2, .., A_n.

Запись $(A_1, A_2, .., A_n) \Rightarrow B$ означает, что B – логическое следствие формул A_1, A_2, .., A_n.

Пример. $(A \to B,\ A \to \overline{B}) \Rightarrow \overline{A}$.

Докажем данное следствие.

A	**B**	**A→B**	$\overline{B}$	**A→**$\overline{B}$	$\overline{A}$
И	И	И	Л	Л	Л
И	Л	Л	И	И	Л
Л	И	**И**	Л	**И**	**И**
Л	Л	**И**	И	**И**	**И**

Из определения следует, что противоречие логически влечет любую формулу, а тавтология логически следует из любой формулы логики.

Определение. Формулы F и G называются равносильными, если они являются логическими следствиями друг друга. Обозначение: $F \equiv G$.

Проанализировав последнее определение, получаем, что формулы равносильны, если они на всех наборах значений переменных превращаются в одинаковые по истинностному значению высказывания.

Следующие теоремы связывают логическое следствие и импликацию, равносильность и эквиваленцию.

Теорема$_1$. $A \Rightarrow B$ тогда и только тогда, когда $A \to B$ – тавтология.

Теорема$_2$. $A \equiv B$ тогда и только тогда, когда $A \leftrightarrow B$ – тавтология.

2. Операции на множестве высказываний

Из элементарных высказываний можно составлять сложные высказывания с помощью логических операций. Чтобы уметь однозначно

выявить истинное значение сложных высказываний, строго определим логические операции. Единственное свойство сложного высказывания, которое нас интересует, это его истинностное значение. Никакого другого, конкретного содержания сложное высказывание не имеет. Элементарные высказывания, входящие в состав сложного высказывания, связываются логическими операторами не по смысловому описанию, а только по их истинностным значениям. Следовательно, сложные высказывания являются функциями от входящих в них элементарных высказываний. Все операции в логике высказываний описываются только таблицей истинности. Все языковые конструкции, которые мы будем использовать для описания той или иной операции, не более чем средство запоминания. Дадим более строгое определение

Функция $f(x_1,...,x_n)$ называется **n–местной булевой функцией**, если каждая переменная принимает только два значения 0 или 1 и функция принимает значения в этом же множестве $\{0;1\}$.

1. Отрицание.

Определим унарную логическую операцию – **отрицание**. Для этой операции таблица истинности выглядит следующим образом:

A	$\overline{A}$
0	**1**
1	**0**

Иллюстрацией отрицания в естественном языке служит частица "не", или слова "неверно, что".

Например: если мы хотим отрицать, что

Точка М принадлежит прямой а (1)

Мы скажем

Точка М не принадлежит прямой а (2)

Если (1) – это высказывание A, то (2) - $\overline{A}$

Обратите внимание, что истинностные значения высказываний (1) и (2) находятся в определенной зависимости: если (1) – истинно, то (2) – ложно.

Если (1) – ложно, то (2) – истинно.

Например, покажем, что $\overline{\overline{A}} = A$

A	$\overline{A}$	$\overline{\overline{A}}$
0	**1**	**0**
1	**0**	**1**

Это одно из свойств Булевой алгебры. Следует отметить, что отрицание составных формул не такая уж тривиальная операция. Чуть позднее мы проиллюстрируем это утверждение.

2. Конъюнкция

Введем еще одну логическую операцию, определив её словесно следующим образом. **Конъюнкция** двух высказываний истинна тогда и только тогда, когда оба высказывания истинны. Эту логическую операцию называется еще логическим умножением, или логическим минимумом. Выпишем таблицу истинности для конъюнкции

A	B	$A \& B$
0	**0**	**0**
0	**1**	**0**
1	**0**	**0**
1	**1**	**1**

Свойства конъюнкции:

$A \& 1 = A$ $\quad$ $A \& \overline{A} = 0$ $\quad$ $A \& 0 = 0$

$A \& A = A$

В естественном языке эта операция чаще всего интерпретируется союзом "и"

Пример: Выведем формулу счастливой любви по Шекспиру. Для этого проанализируем следующие строки:

Увы, я никогда не слышал

И не читал – в истории ли, в сказке

Чтоб гладким был путь истинной любви.

Но или разница в происхождении

О горе, высшему – плениться низшей.

Или различье в летах

О, насмешка!

Быть слишком старым для невесты юной

Иль выбор близких и друзей

О, мука! Но как любить по выбору чужому?

А если выбор всем хорош – война,

Болезнь иль смерть всегда грозят любви.

Выделим в этом примере следующие элементарные высказывания:

A – разница в происхождении

B – разница в летах

C – выбор близких и друзей

D – Война

E – болезнь

F – смерть

Тогда формула будет выглядеть следующим образом

$\overline{A} \& \overline{B} \& \overline{C} \& \overline{D} \& \overline{E} \& \overline{F} = G$

<u>*Пример*</u>: Всякая система уравнений

$$\begin{cases} f(x,y)=0 \\ g(x,y)=0 \end{cases}$$

Представляет собой конъюнкцию решений: $(f(x,y)=0)\&(g(x,y)=0)$

3. Дизъюнкция

Еще одной из логических операций является операция **дизъюнкции**. Дизъюнкция двух элементарных высказываний истинна тогда и только тогда, когда истинно хотя бы одно из элементарных высказываний. Обозначается эта

операция знаком $\vee$ и иногда называется логическим сложением или логическим максимумом. Таблица истинности дизъюнкции выглядит так:

A	B	$A \vee B$
0	**0**	**0**
0	**1**	**1**
1	**0**	**1**
1	**1**	**1**

Укажем свойства этой операции

$A \vee 1 = 1$ $\qquad$ $A \vee \overline{A} = 1$ $\qquad$ $A \vee 0 = A$

$A \vee A = A$

В качестве примера рассмотрим логический анализ решения неравенства

$$\frac{x-1}{x-3} > 0$$

Обычно рассуждают так:

Дробь больше 0 тогда и только тогда, когда и числитель, и знаменатель >0, или числитель и знаменатель <0. В результате этих рассуждений получаем 2 системы неравенств:

$$\begin{cases} x-1>0 \\ x-3>0 \end{cases} \quad \textit{или} \quad \begin{cases} x-1<0 \\ x-3<0 \end{cases}$$

получаем логическую формулировку

$$[(x-1>0)\&(x-3>0)] \vee [(x-1<0)\&(x-3<0)]$$

Вспомнив пример из Шекспира, напишем логическую формулу несчастной любви

$$A \vee B \vee C \vee D \vee E \vee F = R$$

При желании можно показать, что $R = \overline{G}$

Определение конъюнкции и дизъюнкции распространяется на любое число высказываний. Так

$$A_1 \,\&\, A_2 \,\&\ldots\&\, A_n \quad \textit{истинна}, \quad \textit{если} \quad \forall A_i - \textit{истинно}$$

$$A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n \quad \textit{истинна}, \quad \textit{если} \quad \exists A_i - \textit{истинно}$$

4. "Исключающее или"

Операция "**исключающего или**" задается следующей таблицей истинности, она истинна, когда истинен только один из операндов. Эту операцию еще называют строгой дизъюнкцией или логическим неравенством.

A	B	$A \oplus B$
0	**0**	**0**
0	**1**	**1**
1	**0**	**1**
1	**1**	**0**

Эту операцию можно выразить через &,∨,¬.

$A \oplus B = \left(A \& \overline{B}\right) \vee \left(\overline{A} \& B\right)$

В языковом эквиваленте чаще всего эта операция выражается сложным союзом "либо, либо".

Пример: возьмем из изумительной сказки Леонида Филатова "Про Федота –стрельца"

Или леший нынче рьян,
Или воздух нынче пьян,
Или в ухе приключился
У меня какой изъян.
Иль из царских, из окон,
Оглашен такой закон,
Чтобы птицы говорили
Человечьим языком.

Разобьем на элементарные высказывания:

A - леший нынче рьян; B - воздух нынче пьян;

C - в ухе приключился изъян D – оглашён закон

Но поскольку Федот в своем роде "атеист" и готов допустить достоверность одного из этих предположений, но никак не совпадение

нескольких, то данная ситуация описывается следующей логической формулой

$(((A \oplus B) \oplus C) \oplus D)$

Пример: Еще один пример из армейского юмора:

Носки должны быть или черными или синими.

A - носки чёрные; B - носки синие; $A \oplus B$

5. Импликация

Следующая логическая операция, которую мы рассмотрим – это операция **импликации**. Импликация ложна тогда и только тогда, когда A – истинна, а B – ложна.

A	B	$A \to B$
0	**0**	**1**
0	**1**	**0**
1	**0**	**1**
1	**1**	**1**

Это выражение читается так: если A, то B. В таком виде часто формулируются математические теоремы. Если теорема сформулирована как-нибудь иначе, то ее можно перефразировать в указанном виде, не теряя её сущности.

Пример: Теорема: «Вертикальные углы – конгруэнтны», будет выглядеть так: «Если углы вертикальны, то они конгруэнтны». В такой формулировке выявлены посылка – A (углы вертикальны) и заключение B (углы конгруэнтны). Истинность высказывания A, исключает возможность существования таких углов, которые были бы вертикальны и неконгруэнтны.

$A \& B = 1$ углы вертикальны и конгруэнтны

$A \& \overline{B} = 0$ углы вертикальны и неконгруэнтны

$\overline{A} \& B = 1$ невертикальные углы могут быть конгруэнтны

$\overline{A} \& \overline{B} = 1$ углы могут быть невертикальные и неконгруэнтные

В математических терминах импликация еще обозначается фразами:

B – следствие A

A – достаточное условие B

Импликацию тоже можно выразить через &,∨,¬

$A \to B = \overline{A \& \overline{B}} = \overline{A} \vee B$

6. Эквивалентность

Она истинна только тогда, когда значения A и B совпадают. Эту операцию еще иногда называют логическим равенством.

A	B	$A \leftrightarrow B$
0	**0**	**1**
0	**1**	**0**
1	**0**	**0**
1	**1**	**1**

В математических терминах эта операция интерпретируется в качестве фраз "тогда и только тогда", "необходимо и достаточно". Такая форма тоже очень часто используется в формулировке теорем. Эквивалентность представляется в виде:

$A \leftrightarrow B = (A \to B) \& (B \to A)$

Т.е. из A следует B, и из B следует A.

Например: Признак сходимости бесконечного ряда. Ряд сходится тогда и только тогда

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|n_n|} < 1$$

7. Штрих Шеффера

Эта операция обозначается знаком / и определяет несовместимость высказываний. Эта операция ложна тогда и только тогда, когда оба операнда истинны. Выражение «A/B» читается так: «A и B несовместны». Приведем таблицу истинности этой операции.

A	B	A/B
0	**0**	**1**
0	**1**	**1**
1	**0**	**1**
1	**1**	**0**

Например: «2 * 2 = 4» и «2 * 2 = 5» несовместны – это истинное высказывание

«2 * 3 = 6» и «3 * 2 = 6» несовместны – это ложное высказывание, т.к. вот эти то высказывания как раз совместны.

Через базовые операции Штрих Шеффера выражается так:

$A/B = \overline{A \& B}$

Поэтому эту операцию еще часто называют **антиконъюктивной**.

Эта операция интересна тем, что используя ее одну, можно выразить все остальные связки (операции) логики высказываний. Шеффер показал это, и используя эту единственную, связку построил свое исчисление высказываний. Покажем некоторые формулы перехода в это исчисление.

$\overline{A} = A/A$, $\qquad A \& B = \overline{A/B} = (A/B)/(A/B)$.

Упражнение: Выразите через Штрих Шеффера оставшиеся логические операции (дизъюнкцию, импликацию, эквивалентность, исключающее или).

Ограничимся этим набором логических операций. Существует всего 16 двуместных операций. Выпишем их

A	B	0	$A\&B$	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow A$	$A \oplus B$	$A \vee B$	$A \downarrow B$	$A \leftrightarrow B$	$\neg B$	$B \to A$	$\neg A$	$A \to B$	A/B	1
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Все эти функции называют **элементарными**. Символы операций часто называют **логическими связками.**

*Теорема***.** Число всех различных n–местных булевых функций равно 2^{2^n}

Пример, в котором появляются булевы функции.

Составным элементом нервной системы является нейрон. Это устройство предназначено для того, чтобы не пропускать слабые возбуждения и передавать достаточно регулярные и сильные.

Одна из моделей нейрона. Нейрон N имеет n входов, по которым в некоторый момент времени t могут поступать или не поступать возбуждения. Если в момент t более h входов возбуждены, на выход нейрона поступает возбуждение, в противном случае оно не поступает. Обозначим входы нейрона $x_1,...,x_n$. Будем говорить, что вход x_k принимает значение 0 в момент t, если он не возбужден в этот момент, и значение 1, если x_k возбужден в момент t. Состояние выхода $A_h(x_1,...,x_n)$ однозначно определяется соотношением входов и числом h.

Будем считать, что $A_h(x_1,...,x_n)=1$, если среди значений $x_1,...,x_n$ более h равняется 1;

$A_h(x_1,...,x_n)=0$, если среди значений $x_1,...,x_n$ не более h равняется 1

Для $A_1(x_1,x_2,x_3)$ имеем таблицу истинности.

x_1	x_2	x_3	$A_1(x_1,x_2,x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Теперь приведем несколько парадоксальных примеров, и подчеркнем, что истинность или ложность сложного высказывания зависит только от истинности или ложности элементарных высказываний, входящих в него.

Например: «Если треугольник имеет четыре стороны, то 2 +2 = 4». Такое высказывание в обыденной речи будет встречено с легким недоумением, но вы должны хорошо понимать, что это пример операции импликации. По определению, из ложной посылки «Если треугольник имеет четыре стороны», может следовать какое угодно заключение, и сложное высказывание будет истинным.

Поскольку любое истинное высказывание ничем не отличается от другого истинного высказывания, т.к. никаких других свойств высказываний математическая логика не рассматривает, то все истинные высказывания между собой эквивалентны. Это в равной мере относится и ко всем ложным высказываниям.

Рассматривая с такой точки зрения любые два истинных высказывания, например «Дважды два четыре» и «Наполеон умер 5 мая 1821 года», равно как и любые два ложных высказывания вроде «Дважды два пять» и «Снег черен», трактуются как эквивалентные друг другу.

3. Формулы алгебры логики

Определение: **Алфавитом** называется любой непустой набор символов. Элементы этого набора называются **символами алфавита**.

Определение: **Словом в алфавите** G называется произвольная конечная (возможно пустая) последовательность символов из G. Фиксируем некоторый конечный или счетный алфавит переменных $X = (x_1, x_2, ...)$

Определение: **Формула алгебры логики** определяется следующим образом (индуктивное определение):

- Любая логическая переменная есть формула.
- Если A - формула, то (A) - формула (допустимы технические символы)
- Если A и B – формулы, то $\overline{A}, \overline{B}, A \& B, A \vee B, A \to B, A \leftrightarrow B, A \oplus B, A / B$ – тоже формулы (допустимы все логические связки).
- Других формул нет.

Определение: **Подформулой формулы** A называется любое подслово слова A, которое само является формулой.

Для сокращения записи формул обычно принимаются следующие соглашения:

- если часть формулы заключена в скобки, то сначала производится действие в скобках,

- если над частью формулы стоит знак отрицания, то он заменяет собой скобки, в которые заключена эта часть формулы.

Принят следующий порядок выполнения операций:

- Отрицание,
- конъюнкция,
- дизъюнкция,
- импликация и эквивалентность в порядке их записи.

Определение: Формула называется **тождественно истинной** или **тавтологией**, если она реализует функцию «тождественная единица», и **тождественно ложной**, если 0.

Контрольные вопросы:

1. Дайте определение отрицания, конъюнкции, дизъюнкции, импликации и эквивалентности.

2. Запишите порядок выполнения логических операций без скобок

3. Что такое формула алгебры логики? Какие формулы бывают? Приведите примеры.