

### Задание:

- Изучить теорию: §44 <https://file.11klasov.net/3072-algebra-i-nachala-matematicheskogo-analiza-10-11-klassy-bazovyy-i-uglublennyy-urovni-alimov-ash-kolyagin-yum-i-dr.html> качать 2016 год);
- Написать краткий конспект;
- Разобрать примеры решения;
- Решить № **563**;
- Теория ниже предоставлена в ознакомительных целях (повторение прошлого семестра и наш материал);
- По вопросам обращаться 072-1098278 или [hvastov@rambler.ru](mailto:hvastov@rambler.ru)
- Фотоотчёт конспекта прислать в течении 3 дней со дня получения задания на [hvastov@rambler.ru](mailto:hvastov@rambler.ru)

### Нахождение значений тригонометрических функций

Тригонометрические функции имеют широкое применение.

Во-первых, они помогают решать геометрические задачи – рассчитывать треугольники и более сложные фигуры. Кроме того, их можно использовать и в быту, например чтобы понять, пролезет ли кровать в дверной проем или нет (до того, как совершить покупку). Или для того, чтобы оценить высоту дома или дерева, ширину реки.

Но чаще тригонометрические функции применяют для решения технических задач: построения чертежей деталей, зданий, расчета нагрузок на составные части механизма, просчета траектории движения и прочее.

Наконец, с помощью тригонометрических функций можно описывать колебания и волны. Об этих понятиях вы уже знаете из курса физики (урок [«Механические колебания»](#)), урок [«Механические волны. Звук»](#)). Именно с помощью синусов и косинусов можно создать математическую модель различных колебаний: от механических до электромагнитных (урок [«Электромагнитные волны и свет»](#)).

Это основные сферы применения тригонометрических функций. Те же, кто собрался посвятить свою жизнь технической профессии, увидят и другие применения этого математического инструмента.

Вы уже знаете различные соотношения для тригонометрических функций, с помощью которых можно вычислить их значения и упростить выражение, которое содержит такие функции. На этом уроке мы займемся отработкой навыков упрощения и вычисления.

Прежде чем начать, вспомним, что для углов существуют две основные единицы измерения: градусы и радианы. Все вычисления вы должны уметь делать как в одних, так и в других единицах измерения. Основное соотношение:  $180^\circ = \pi$  радиан. Соответственно, в два раза больший угол:  $360^\circ = 2\pi$  радиан; а в два раза меньший –  $90^\circ = \frac{\pi}{2}$  радиан. Эти соотношения желательно держать в голове, остальные углы можно перевести из градусов в радианы с помощью пропорции:

$$\alpha = \frac{\alpha^\circ}{180^\circ} \cdot \pi$$

#### Задание 1.

Известно, что:

$$\cos \alpha = \frac{1}{3}$$

Определить значения синуса, тангенса и котангенса  $\alpha$ , если  $360^\circ < \alpha < 540^\circ$ .

*Решение*

Зная значение одной тригонометрической функции, всегда можно найти значение всех остальных с точностью до знака. Для этого понадобится основное тригонометрическое тождество:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

А также определения тангенса и котангенса для произвольного угла:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

Используем эти инструменты. Подставим значение косинуса в основное тригонометрическое тождество:

$$\sin^2 \alpha + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1$$

Упростив, получим:

$$\sin^2 \alpha = 1 - \frac{1}{9}$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{8}{9}$$

Тогда:

$$\sin \alpha = \pm \sqrt{\frac{8}{9}} = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Мы получили два возможных значения синуса: положительное и отрицательное. Зная дополнительную информацию  $360^\circ < \alpha < 540^\circ$ , мы можем однозначно выбрать знак. Отмечаем на окружности точки, соответствующие углам  $360^\circ$  и  $540^\circ$ . Угол  $\alpha$  находится между ними, т. е. ему соответствуют точки верхней полуокружности (см. рис. 1).

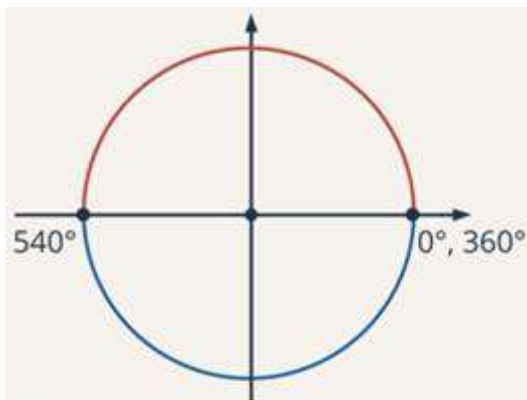


Рис. 1. Иллюстрация к заданию 1

Ординаты всех этих точек положительны, значит, и  $\sin \alpha > 0$ . Еще говорят так: «угол  $\alpha$  лежит в первой или второй четверти. В этих четвертях синус положительный»:

$$\sin \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Осталось найти тангенс и котангенс по определению:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{2\sqrt{2}}{3}; \frac{1}{3} = 2\sqrt{2}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{1}{3}; \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

Ответ:  $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}; \operatorname{tg} \alpha = 2\sqrt{2}; \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}.$

**Задание 2.** Найти значение выражения:

$$-4\sqrt{3} \sin(-780^\circ)$$

*Решение*

Идея решения подобных заданий следующая: преобразовать выражение так, чтобы получить острый угол. А затем найти значение функции по таблице:

Градусы	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$
Рadiany	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Для преобразования понадобятся формулы приведения:

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(\alpha + 180^\circ) = -\cos \alpha$$

$$\sin(\alpha + 180^\circ) = -\sin \alpha$$

$$\cos(\alpha + 360^\circ) = \cos \alpha$$

$$\sin(\alpha + 360^\circ) = \sin \alpha$$

В задании угол отрицательный ( $-780^\circ$ ), поэтому начинаем с формул для  $-\alpha$ :

$$-4\sqrt{3} \sin(-780^\circ) = -4\sqrt{3} \cdot (-\sin 780^\circ) = 4\sqrt{3} \sin 780^\circ$$

Теперь убираем из аргумента периоды (добавление и вычитание целого числа периодов не меняет значение функции):

$$4\sqrt{3} \sin 780^\circ = 4\sqrt{3} \sin(420^\circ + 360^\circ) = 4\sqrt{3} \sin 420^\circ = 4\sqrt{3} \sin(60^\circ + 360^\circ) = 4\sqrt{3} \sin 60^\circ$$

По таблице находим:

$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Подставляем в выражение:

$$4\sqrt{3} \sin 60^\circ = 4\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 6$$

Ответ: 6.

Отметим, что период  $360^\circ$  (или  $2\pi$ ) для синусов и косинусов мы можем выделять не один раз. Поэтому для больших значений угла удобно его сразу представить в виде  $\alpha = 360^\circ \cdot n + x$  (или  $\alpha = 2\pi \cdot n + x$  в радианах), где  $n$  – некоторое целое число. А для этого следует разделить с остатком значение угла на  $360^\circ$ .

Например, найдем  $\cos 4050^\circ$ . Делим с остатком  $4050$  на  $360$ :

$$4050^\circ = 360^\circ \cdot 11 + 90^\circ$$

Получаем:

$$\cos 4050^\circ = \cos(360^\circ \cdot 11 + 90^\circ) = \cos 90^\circ = 0$$

У тангенсов и котангенсов период равен  $180^\circ$  (или  $\pi$ ). Соответственно, угол представляем в виде  $\alpha = 180^\circ \cdot n + x$  (или  $\alpha = \pi \cdot n + x$  в радианах).

Например, вычислим  $\operatorname{tg} \frac{13\pi}{3}$ :

$$\operatorname{tg} \frac{13\pi}{3} = \operatorname{tg} 4\frac{1}{3}\pi = \operatorname{tg} \left( 4\pi + \frac{1}{3}\pi \right) = \operatorname{tg} \frac{1}{3}\pi = \operatorname{tg} \frac{\pi}{3}$$

Для этого угла можем уже воспользоваться таблицей:

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

### Упрощение выражений. Формулы приведения

Если в задании с тригонометрическими функциями вам встретились тангенс или котангенс, то лучше сразу расписать их по определению. Это сведет вашу задачу к работе только с синусами и косинусами.

**Задание 3.** Найти значение выражения:

$$\frac{2 \cos \alpha - 4 \sin \alpha}{2 \sin \alpha + 5 \cos \alpha}$$

если  $\operatorname{tg} \alpha = 1,25$ .

*Решение*

По определению:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

То есть:

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 1,25$$

Теперь остались только синусы и косинусы. Из полученного соотношения выразим синус:

$$\sin \alpha = 1,25 \cos \alpha$$

Теперь подставим это в искомое выражение:

$$\frac{2 \cos \alpha - 4 \sin \alpha}{2 \sin \alpha + 5 \cos \alpha} = \frac{2 \cos \alpha - 4 \cdot 1,25 \cos \alpha}{2 \cdot 1,25 \cos \alpha + 5 \cos \alpha} =$$

Осталось упростить выражение и получить ответ:

$$= \frac{2 \cos \alpha - 5 \cos \alpha}{2,5 \cos \alpha + 5 \cos \alpha} = \frac{-3 \cos \alpha}{7,5 \cos \alpha} = \frac{-3}{7,5} = -0,4$$

Ответ:  $-0,4$ .

### Другой способ решения

Уменьшить количество различных видов функций в таком выражении можно и другим способом. Если все слагаемые содержат синус и косинус в одинаковой степени, то можно разделить числитель и знаменатель на синус или косинус в этой степени, в данном случае – в первой. Посмотрим, к чему это приведет.

Сразу оговоримся, почему такое деление можно делать. Так как нам дано значение тангенса угла, то косинус этого угла не может равняться 0 (иначе тангенс был бы не определен), а так как тангенс не равен 0, то и синус угла не может равняться 0 (иначе бы тангенс, как отношение синуса и косинуса, тоже был бы равен 0). Поэтому можем смело делить на любую из функций.

Разделим на  $\cos \alpha$  и числитель, и знаменатель:

$$\frac{2 \cos \alpha - 4 \sin \alpha}{2 \sin \alpha + 5 \cos \alpha} = \frac{2 - 4 \operatorname{tg} \alpha}{2 \operatorname{tg} \alpha + 5} =$$

Мы получили выражение, которое содержит только тангенс. Осталось подставить его значение из условия:

$$= \frac{2 - 4 \cdot 1,25}{2 \cdot 1,25 + 5} = \frac{2 - 5}{2,5 + 5} = \frac{-3}{7,5} = -0,4$$

**Задание 4.** Упростить выражение:

$$\frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 x} + \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$$

*Решение*

Видим тангенс и котангенс – выражаем их через синус и косинус:

$$\frac{1}{1 + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}} + \frac{1}{1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}$$

Получились многоэтажные дроби. Лучше избавиться от них, заменив черту дроби знаком деления:

$$1: \left( 1 + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} \right) + 1: \left( 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \right)$$

Теперь вспоминаем принципы работы с дробями. Сначала приводим к общему знаменателю:

$$1: \left( \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} \right) + 1: \left( \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \right)$$

Можно продолжить выполнять операции с дробями. А можно отметить, что в числителях дробей мы видим формулу основного тригонометрического тождества. Можем заменить  $\sin^2 x + \cos^2 x$  на 1 – это существенно упростит наше выражение:

$$1: \frac{1}{\sin^2 x} + 1: \frac{1}{\cos^2 x}$$

Выполняем деление:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

Ответ: 1.

Кроме основного тригонометрического тождества и определений тангенса и котангенса, вы знаете еще множество формул для работы с тригонометрическими функциями. С их помощью также можно упрощать выражения. Главное – понять, какую формулу нужно использовать. Чем больше практики будет, тем легче вам будет выбрать нужную формулу. Но поначалу не страшно, если выбранный способ решения окажется длинным или не приведет к нужному результату. Тогда нужно вернуться и попробовать использовать другую формулу.

**Задание 5.** Упростить выражение:

$$\frac{3 \sin(\alpha - 9\pi) + \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)}{\sin(\pi - \alpha)}$$

*Решение*

Упростим каждую из функций по отдельности.

1)  $\sin(\alpha - 9\pi)$ . Для начала выделим период  $2\pi$ . Его можно выделить 4 раза:

$$9\pi = 2\pi \cdot 4 + \pi$$

Тогда:

$$\sin(\alpha - 9\pi) = \sin(\alpha - (2\pi \cdot 4 + \pi)) = \sin(\alpha - 2\pi \cdot 4 - \pi) = \sin(\alpha - \pi)$$

У нас есть формула для  $\sin(\alpha + \pi)$ , а тут  $-\pi$ . Что делать? Прибавим период; значение функции при этом не изменится:

$$\sin(\alpha - \pi) = \sin(\alpha - \pi + 2\pi) = \sin(\alpha + \pi)$$

Теперь уже можно использовать формулу приведения:

$$\sin(\alpha + \pi) = -\sin \alpha$$

2)  $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$ . У нас есть формула для  $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ . В ней вычитается угол, а в нашем выражении – сложение. Поэтому, чтобы использовать эту формулу, превратим сложение в вычитание:

$$\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (-\alpha)\right)$$

Формулы приведения справедливы для любых углов. Поэтому можем применить ее и для угла  $-\alpha$ . Получим:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - (-\alpha)\right) = \sin(-\alpha)$$

Использував еще одну формулу приведения, получим:

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

3)  $\sin(\pi - \alpha)$ . Перепишем это как  $\sin(-\alpha + \pi)$ . К углу  $-\alpha$  прибавляется  $\pi$ , можем использовать соответствующую формулу приведения:

$$\sin(-\alpha + \pi) = -\sin(-\alpha)$$

Используя еще одну формулу приведения, получим:

$$-\sin(-\alpha) = -(-\sin \alpha) = \sin \alpha$$

Подставим упрощенные выражения в исходное:

$$\frac{3 \sin(\alpha - 9\pi) + \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)}{\sin(\pi - \alpha)} = \frac{-3 \sin \alpha - \sin \alpha}{\sin \alpha} = \frac{-4 \sin \alpha}{\sin \alpha} = -4$$

Ответ:  $-4$ .

### Другой способ решения

Все три тригонометрические функции содержат аргумент в виде, к которому можно применить правило «головы лошади»:

$$1. \quad 3 \sin(\alpha - 9\pi) = 3 \sin(-9\pi + \alpha) =$$

$-9\pi$  находится там же, где  $\pi$ , плюс альфа, третья четверть, синус отрицательный (см. рис. 2). Диаметр горизонтальный, лошадь мотает головой, функцию не меняем, получаем:

$$= -3 \sin \alpha$$

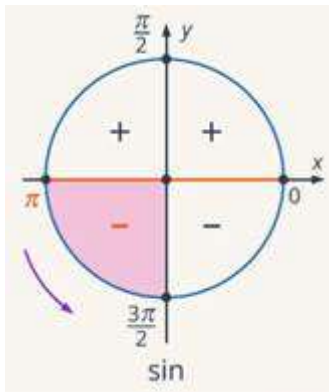


Рис. 2. Иллюстрация к заданию 5

$$2. \quad \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$$

Вторая четверть, косинус отрицательный, диаметр вертикальный (см. рис. 3), меняем функцию, получаем:

$$= -\sin \alpha$$

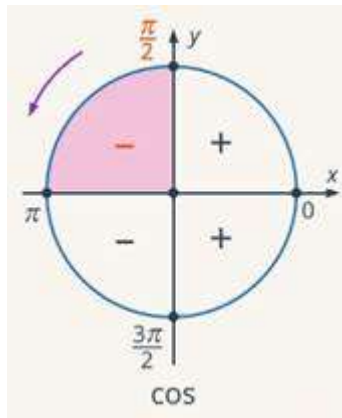


Рис. 3. Иллюстрация к заданию 5

3.  $\sin(\pi - \alpha)$

Вторая четверть, синус положительный, диаметр горизонтальный (см. рис. 4), функцию не меняем, получаем:

$= \sin \alpha$

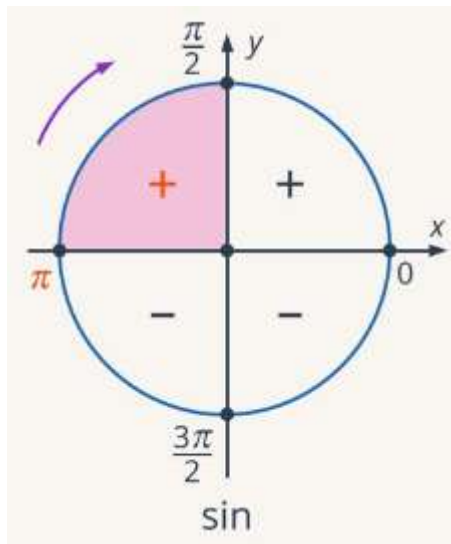


Рис. 4. Иллюстрация к заданию 5

Тогда:

$$\frac{3 \sin(\alpha - 9\pi) + \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)}{\sin(\pi - \alpha)} = \frac{-3 \sin \alpha - \sin \alpha}{\sin \alpha} = \frac{-4 \sin \alpha}{\sin \alpha} = -4$$

**Задание 6.** Вычислить:

$\text{tg } 13^\circ \cdot \text{tg } 103^\circ$

*Решение*

В таблице мы не найдем точного значения  $\text{tg } 13^\circ$ . Конечно, можно вычислить приближенное значение с помощью калькулятора:

$\text{tg } 13^\circ \approx 0,231$

Аналогично можно поступить с другим тангенсом и вычислить ответ:

$\text{tg } 103^\circ \approx -4,331$

$\text{tg } 13^\circ \cdot \text{tg } 103^\circ \approx 0,231 \cdot (-4,331) = -1,000461$



Но это лишь приближенное значение. Можно ли найти точное? Обратим внимание, что углы отличаются на  $90^\circ$ . Это дает подсказку, что здесь можно использовать формулы приведения:

$$\operatorname{tg} 103^\circ = \operatorname{tg}(90^\circ + 13^\circ)$$

В формуле приведения из  $90^\circ$  вычитается альфа, а тут – прибавляется. Как и в предыдущем примере, сделаем из сложения вычитание:

$$\operatorname{tg}(90^\circ - (-13^\circ)) = \operatorname{ctg}(-13^\circ)$$

Распишем котангенс по определению, чтобы получить для него формулу приведения:

$$\operatorname{ctg}(-13^\circ) = \frac{\cos(-13^\circ)}{\sin(-13^\circ)} = \frac{\cos 13^\circ}{-\sin 13^\circ} = -\operatorname{ctg} 13^\circ$$

Тогда:

$$\operatorname{tg} 13^\circ \cdot \operatorname{tg} 103^\circ = \operatorname{tg} 13^\circ \cdot (-\operatorname{ctg} 13^\circ) = -1$$

И это уже будет точный, а не приближенный ответ.

Ответ:  $-1$ .

### Другой способ решения

Ко второму тангенсу применим формулу приведения (используя правило «головы лошади»):  $\operatorname{tg} 103^\circ = \operatorname{tg}(90^\circ + 13^\circ) = -$  вторая четверть, тангенс отрицательный, диаметр вертикальный (см. рис. 5), функцию меняем:

$$\operatorname{tg} 13^\circ \cdot \operatorname{tg} 103^\circ = \operatorname{tg} 13^\circ \cdot (-\operatorname{ctg} 13^\circ) = -\operatorname{tg} 13^\circ \cdot \operatorname{ctg} 13^\circ = -1$$

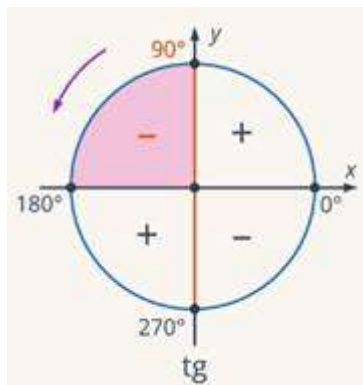


Рис. 5. Иллюстрация к заданию 6

Подведем итоги использования формул приведения.

1. Сначала убираем периоды у функций. Для этого представляем угол в виде:  
 $\alpha = 360^\circ \cdot n + x$  (или  $\alpha = 2\pi \cdot n + x$ ) для косинусов и синусов;  
 $\alpha = 180^\circ \cdot n + x$  (или  $\alpha = \pi \cdot n + x$ ) для тангенсов и котангенсов.

2. Выбираем подходящую формулу приведения. При необходимости прибавляем/вычитаем 1 период, заменяем вычитание сложением или наоборот.

3. При наличии тангенсов/котангенсов расписываем их через синус и косинус, к которым применяем формулы приведения. Или же используем готовые формулы приведения для тангенсов и котангенсов.

4. Формулы приведения можно применять и для расчетов. То, что их нужно применить, подскажет следующее: сумма или разность углов будет равна  $90^\circ$  или  $180^\circ$ .

#### Формулы двойного и половинного аргумента

Теперь перейдем к формулам двойного аргумента и следствиям из них. Напомним:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

Получить формулы для тангенса и котангенса двойного угла очень просто. Этот прием мы уже неоднократно использовали сегодня в уроке. Расписываем по определению:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}$$

По сути, мы получили формулу для тангенса двойного угла. Ее можно преобразовать и к другому виду, разделив числитель и знаменатель на  $\cos^2 \alpha \neq 0$ :

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha}}{\frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}}$$

Получилась многоэтажная дробь, разберем ее числитель и знаменатель отдельно:

$$\frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{2 \sin \alpha}{\cos \alpha} = 2 \operatorname{tg} \alpha$$

$$\frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} - \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = 1 - \operatorname{tg}^2 \alpha$$

В итоге тангенс двойного угла мы выразили только через тангенс одинарного.

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

Аналогичным образом можно поступить и с котангенсом.

**Задание 7.** Найти  $\operatorname{tg}^2 3\alpha$ , если  $\cos 6\alpha = 0,2$ .

*Решение*

Обратим внимание, что аргументы отличаются в 2 раза. Значит, нам понадобятся формулы двойного угла или же следствия из них – формулы половинного угла.

**Способ 1.** Попробуем использовать формулы двойного угла:

$$\cos 6\alpha = \cos(2 \cdot 3\alpha) = \cos^2 3\alpha - \sin^2 3\alpha$$

По условию, это выражение равно  $0,2$ :

$$\cos^2 3\alpha - \sin^2 3\alpha = 0,2$$

Тут у нас косинус квадрат и синус квадрат. Для них мы знаем еще одно соотношение – основное тригонометрическое тождество:

$$\cos^2 3\alpha + \sin^2 3\alpha = 1$$

Из этих двух соотношений мы можем найти значения  $\cos^2 3\alpha$  и  $\sin^2 3\alpha$ . Сложив их, получим:

$$2 \cos^2 3\alpha = 1,2$$

$$\cos^2 3\alpha = 0,6$$

Тогда:

$$\sin^2 3\alpha = 1 - \cos^2 3\alpha = 1 - 0,6 = 0,4$$

Требуется найти  $\operatorname{tg}^2 3\alpha$ . Как обычно, расписываем по определению:

$$\operatorname{tg}^2 3\alpha = \frac{\sin^2 3\alpha}{\cos^2 3\alpha} = \frac{0,4}{0,6} = \frac{2}{3}$$

**Способ 2.** Можно использовать формулы половинного аргумента. Тогда  $\sin^2 3\alpha$  и  $\cos^2 3\alpha$  можно сразу выразить:

$$\sin^2 3\alpha = \frac{1 - \cos 6\alpha}{2} = \frac{1 - 0,2}{2} = 0,4$$

$$\cos^2 3\alpha = \frac{1 + \cos 6\alpha}{2} = \frac{1 + 0,2}{2} = 0,6$$

$$\operatorname{tg}^2 3\alpha = \frac{\sin^2 3\alpha}{\cos^2 3\alpha} = \frac{0,4}{0,6} = \frac{2}{3}$$

Ответ:  $\frac{2}{3}$ .

Вторым способом получилось быстрее, но нужно помнить больше формул. Каждый сам может выбрать более удобный для себя способ решения: больше запоминать, но быстрее решать или же запоминать меньше, но тогда решение может оказаться длиннее.

Уметь применять формулы двойных аргументов нужно как слева направо, так и справа налево. Слева направо это сделать проще, а вот справа налево их нужно «увидеть». Вспомните: похожая ситуация была с формулами сокращенного умножения. Найти выражение вида  $(a + b)^2$  просто: увидел – применил формулу. А вот в обратную сторону выражение вида  $a^2 + 2ab + b^2$  нужно еще заметить.

Итак, посмотрим на правые части формул двойных аргументов и подумаем, на что же нам обращать внимание.

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

Для синусов справа стоит произведение синуса и косинуса с одинаковыми аргументами. Именно на это мы будем обращать внимание. Умножить и разделить выражение на  $2$  – это не проблема. Для косинусов справа стоит разность квадратов. Не путайте с основным тригонометрическим тождеством – там сумма квадратов.

**Задание 8.** Найти значение выражения:

$$3 \sin \frac{11\pi}{12} \cdot \cos \frac{11\pi}{12}$$

*Решение*

Видим произведение косинуса и синуса одного аргумента. Это показатель того, что нужно применить формулу синуса двойного угла. Не хватает двойки перед выражением. Поэтому умножим и разделим выражение на 2:

$$3 \sin \frac{11\pi}{12} \cdot \cos \frac{11\pi}{12} = \frac{3}{2} \cdot 2 \sin \frac{11\pi}{12} \cdot \cos \frac{11\pi}{12} =$$

Теперь можем применить формулу:

$$= \frac{3}{2} \cdot \sin \left( 2 \cdot \frac{11\pi}{12} \right) = \frac{3}{2} \cdot \sin \frac{11\pi}{6}$$

Далее нужно применить формулы приведения. Можете самостоятельно потренироваться это делать. В итоге вы должны получить ответ  $-0,75$ . Если ответ не совпал, смотрите решение ниже.

Ответ:  $-0,75$ .

### Использование формул приведения

Выделим в дроби целую часть:  $\frac{11\pi}{6} = 1 \frac{5}{6}\pi = \pi + \frac{5}{6}\pi$

Тогда:  $\sin \frac{11\pi}{6} = \sin \left( \pi + \frac{5}{6}\pi \right) = -\sin \frac{5\pi}{6}$

У нас по-прежнему в аргументе не острый угол. Попробуем еще раз выделить  $\pi$ :

$$\frac{5\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{6} + \pi$$

$$-\sin \frac{5\pi}{6} = -\sin \left( -\frac{\pi}{6} + \pi \right) = \sin \left( -\frac{\pi}{6} \right)$$

Осталось применить формулу приведения для отрицательных углов и найти значение по таблице:

$$\sin \left( -\frac{\pi}{6} \right) = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$

Тогда:  $\frac{3}{2} \cdot \sin \frac{11\pi}{6} = \frac{3}{2} \cdot \left( -\frac{1}{2} \right) = -\frac{3}{4} = -0,75$

### [Тригонометрические функции суммы и разности](#)

Перейдем к применению формул косинусов и синусов суммы и разности. Они не так часто применяются при упрощениях и вычислениях, как следствия из них – формулы двойных углов. Но несколько полезных применений все же есть.

Во-первых, с помощью них можно получить аналогичные формулы для тангенсов:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}$$

Выводятся они точно так же, как и формулы для тангенса двойного угла. Можете самостоятельно попробовать их получить. Проверить себя можно ниже.

### Вывод формул тангенса суммы и разности

По определению:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)}$$

Применяем формулы косинусов и синусов суммы:

$$\frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta}$$

Разделим числитель и знаменатель на  $\cos \alpha \cdot \cos \beta \neq 0$ . В числителе получим:

$$\frac{\sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} = \frac{\sin \alpha \cdot \cos \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} + \frac{\cos \alpha \cdot \sin \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta$$

В знаменателе:

$$\frac{\cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} = \frac{\cos \alpha \cdot \cos \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} - \frac{\sin \alpha \cdot \sin \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} = 1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta$$

В итоге:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$$

Чтобы получить формулу разности, запишем:

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \operatorname{tg}(\alpha + (-\beta)) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg}(-\beta)}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg}(-\beta)}$$

С учетом формул приведения:

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$$

Как и другие формулы, формулы косинусов и синусов суммы и разности могут помочь при упрощении выражений.

**Задание 9.** Упростить выражение:

$$\frac{\cos x \cdot \cos y - \cos(x + y)}{\cos(x - y) - \sin x \cdot \sin y}$$

*Решение.*

Применяем формулы косинуса суммы и разности:

$$\begin{aligned} \frac{\cos x \cdot \cos y - \cos(x + y)}{\cos(x - y) - \sin x \cdot \sin y} &= \frac{\cos x \cdot \cos y - (\cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y)}{\cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y - \sin x \cdot \sin y} = \frac{\sin x \cdot \sin y}{\cos x \cdot \cos y} \\ &= \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y \end{aligned}$$

Ответ:  $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y$ .

У формулы синуса суммы есть еще один, совсем не очевидный способ применения.

**Задание 10.** Упростить выражение:

$$\sqrt{3} \cos x + \sin x$$

*Решение.*

Казалось бы: куда же еще упрощать, тут всего 4 операции для вычисления? Но это можно сделать. Вынесем за скобку число  $2$ . Да, в выражении его нет. Но это не мешает нам каждое слагаемое умножить и поделить на  $2$ :

$$\sqrt{3} \cos x + \sin x = \frac{2\sqrt{3}}{2} \cos x + \frac{2}{2} \sin x = 2 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x \right)$$

Пока не проще. Но подождите:  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  и  $\frac{1}{2}$  – это значения косинусов и синусов из таблицы. Например:

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin \frac{\pi}{3}$$

$$\frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3}$$

Тогда наше выражение равно:

$$2 \left( \sin \frac{\pi}{3} \cdot \cos x + \cos \frac{\pi}{3} \cdot \sin x \right)$$

В скобках мы видим синус суммы. Получаем ответ:

$$2 \sin \left( x + \frac{\pi}{3} \right)$$

Ответ:  $2 \sin \left( x + \frac{\pi}{3} \right)$ .

Это выражение действительно проще – в нем всего 3 операции: сложение, вычисление синуса, умножение.

Данный прием может пригодиться не только при упрощении выражений, но и при решении уравнений, оценке значений, построении графиков. В общем виде его можно представить так.

Пусть имеется выражение вида:

$$a \cos x + b \sin x$$

Выносим за скобки выражение  $\sqrt{a^2 + b^2}$ :

$$a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \left( \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x \right)$$

При этом всегда можно найти такой угол  $\varphi$ , что:

$$\sin \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\cos \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Тогда получим:

$$\sqrt{a^2 + b^2} \cdot (\sin \varphi \cos x + \cos \varphi \sin x) = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sin(x + \varphi)$$

О том, почему всегда найдется такой угол  $\varphi$ , смотрите ниже.

### Условия, что два числа являются косинусом и синусом некоторого угла

Найдем условия того, что два числа являются косинусом и синусом некоторого угла.

Для произвольного угла мы давали определение его синуса и косинуса – это координаты соответствующей точки на единичной окружности (см. рис. 1).

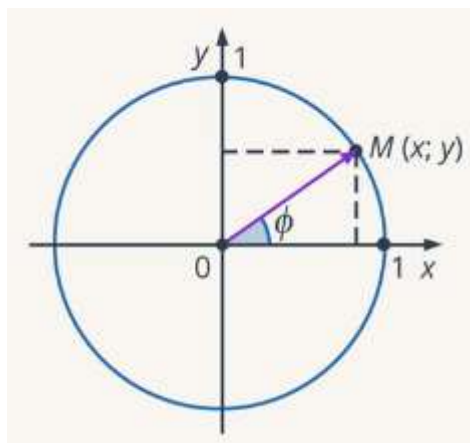


Рис. 1. Синус и косинус произвольного угла – это координаты соответствующей точки на единичной окружности

Верно и обратное: если мы возьмем точку на единичной окружности, то ее координаты – это будут синус и косинус соответствующего угла. Точнее, многих углов – с точностью до периода. Значит, если пара чисел – это координаты точки на единичной окружности, то эти числа будут косинусом и синусом некоторого угла  $\varphi$ .

А какое условие, что точка лежит на единичной окружности? Сумма квадратов ее координат должна равняться 1 (уравнение окружности:  $x^2 + y^2 = 1$ ). Вот и получили условие.

Проверим его для выражений  $\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$  и  $\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ :

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2 = 1$$

Возводим в квадрат:

$$\frac{a^2}{a^2 + b^2} + \frac{b^2}{a^2 + b^2} = 1$$

Равенство верное. Значит, всегда найдется такой угол  $\varphi$ , что:

$$\sin \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\cos \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Естественно, это не случайность – мы специально так выбрали выражения, чтобы сумма их квадратов была равна 1.

В конце нашего занятия мы поговорим о формулах преобразования суммы тригонометрических функций в произведение и наоборот. Как и все предыдущие, они также применяются для упрощения выражений. Конечно, у вас может возникнуть вопрос: «Во что преобразовывать, чтобы упростить выражение: в сумму или в произведение?». Если у вас такой вопрос возник, вспомните, как поступать в таких же ситуациях с рациональными выражениями: когда раскладывать на множители, а когда – раскрывать скобки.

**Задание 11.** Упростить выражение:

$$\frac{\cos 5a + \cos 6a + \cos 7a}{\sin 5a + \sin 6a + \sin 7a}$$

*Решение.*

Упростить дробь – значит ее сократить. Для сокращения дроби нужно разложить числитель и знаменатель на множители. То есть нужно преобразовать сумму в произведение. Тут у нас по 3 слагаемых, какие же складывать? Возможны различные варианты, но начинать всегда лучше с симметричных. То есть со сложения  $\cos 5a$  и  $\cos 7a$  и аналогичных синусов:

$$\cos 5a + \cos 7a = 2 \cos \frac{5a + 7a}{2} \cdot \cos \frac{5a - 7a}{2} = 2 \cos 6a \cdot \cos(-a) = 2 \cos 6a \cdot \cos a$$

$$\sin 5a + \sin 7a = 2 \sin \frac{5a + 7a}{2} \cdot \cos \frac{5a - 7a}{2} = 2 \sin 6a \cdot \cos(-a) = 2 \sin 6a \cdot \cos a$$

Подставим в исходное выражение:

$$\frac{2 \cos 6a \cdot \cos a + \cos 6a}{2 \sin 6a \cdot \cos a + \sin 6a} =$$

Теперь тут есть общие множители, которые можно вынести за скобки:

$$= \frac{\cos 6a (2 \cos a + 1)}{\sin 6a (2 \cos a + 1)} = \frac{\cos 6a}{\sin 6a} = \operatorname{ctg} 6a$$

Ответ:  $\operatorname{ctg} 6a$ .

**Задание 12.** Доказать тождество:

$$2 \cos 3x \cdot \cos x - \cos 2x = \cos 4x$$

*Решение.*

Для доказательства упростим левую часть равенства и покажем, что она всегда равна правой. Здесь по порядку действия стоит сначала умножение, затем – сложение. Поэтому сначала можем преобразовать только произведение в сумму:

$$2 \cos 3x \cdot \cos x = \cos(3x + x) + \cos(3x - x) = \cos 4x + \cos 2x$$

Подставив в левую часть равенства, получим:

$$2 \cos 3x \cdot \cos x - \cos 2x = \cos 4x + \cos 2x - \cos 2x = \cos 4x$$

Видим, что после упрощения левая часть равенства тождественно равна правой.

*Доказано.*