Уважаемые студенты!

Вашему вниманию представлена лекция на тему «Элементарные булевы функции. Равносильности»

Задание

1. Прочитать внимательно лекцию.
2. Повторить 1-ю часть лекции «Элементарные булевы функции», законспектировать Основные равносильности, и примеры решения типовых упражнений, лекцию в рабочую тетрадь.
4. Фотоотчет присылать на электронную почту (и только на электронную почту!) в трехдневный срок

С уважением, Хвастова Светлана Ивановна

!!! Если возникнут вопросы обращаться по телефону 0721389311 (ватсап).

Электронная почта: xvsviv@rambler.ru

Элементарные булевы функции

Булевых (или логических) функций от одной переменной $2^{2^1} = 2^2 = 4$. Они приведены в следующей таблице:

x	0	x	отрицание $\bar{x}$	1
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Основные элементарные булевы функции от двух переменной приведены в следующей таблице:

x_1	x_2	конъюнкция $x_1 \wedge x_2$	дизъюнкция $x_1 \vee x_2$	импликация $x_1 \to x_2$	эквивалентность $x_1 \sim x_2$	сложение по модулю два $x_1 \oplus x_2$	стрелка Пирса $x_1 \downarrow x_2$	штрих Шеффера $x_1 \mid x_2$
0	0	0	0	1	1	0	1	1
0	1	0	1	1	0	1	0	1
1	0	0	1	0	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1	0	0	0

Функция $x_1 \wedge x_2$ называется конъюнкцией, ее обозначают также $x_1 \& x_2$, но чаще всего знак конъюнкции аналогично знаку умножения опускают и пишут $x_1 x_2$. Конъюнкция $x_1 x_2$ равна единице, только если x_1=1 и x_2=1 одновременно, поэтому ее часто называют функцией И. Еще одно название конъюнкции — логическое умножение, поскольку ее таблица истинности действительно совпадает с таблицей обычного умножения для чисел 0 и 1.

Функция $x_1 \vee x_2$ называется дизъюнкцией. Дизъюнкция $x_1 \vee x_2$ равна единице, только если x_1=1 или x_2=1 (т.е. хотя бы одна переменная равна единице), поэтому ее часто называют функцией ИЛИ.

Кроме таблицы истинности булевы функции могут быть заданы аналитически с помощью формул. Например, $F = (\bar{x}_1 \vee x_2 x_3) \oplus (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)$.

Если формула *a* реализует булеву функцию *F*, которая тождественно равна единице, то она называется тождественно истинной. Если формула *a* реализует булеву функцию *F*, которая тождественно равна нулю, то она называется тождественно ложной.

Если формулы *a* и *b*, зависят от одних и тех же переменных и реализуют одну и ту же булеву функцию *F*, то формулы *a* и *b* называются равносильными.

Основные равносильности

Закон двойного отрицания

$$\bar{\bar{x}} = x.$$

Идемпотентность

$$x \vee x \vee \ldots \vee x = x, \quad xx \cdots x = x.$$

Коммутативность

$$x \vee y = y \vee x, \; xy = yx.$$

Ассоциативность

$$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z, \; x(yz) = (x\,y)\,z.$$

Дистрибутивность

$$x(y \vee z) = xy \vee xz, \; x \vee yz = (x \vee y)(x \vee z).$$

Законы де Моргана

$$\overline{xy} = \bar{x} \vee \bar{y}, \; \overline{x \vee y} = \bar{x}\,\bar{y}.$$

Формулы с константами

$x \vee \bar{x} = 1, \quad 0 \vee x = x, \quad 1 \vee x = 1,$
$x\bar{x} = 0, \quad 0x = 0, \quad 1x = x.$

Дополнительные равносильности

$x \to y = \bar{x} \vee y,$
$x \sim y = \bar{x}\,\bar{y} \vee xy,$
$x \sim y = (x \to y)(y \to x),$
$x \oplus y = \bar{x}\,y \vee x\bar{y},$
$x \oplus 1 = \bar{x}\,,$
$x \vee y = x \oplus y \oplus xy,$
$x \downarrow y = \overline{x \vee y}\,,$
$x \mid y = \overline{xy}\,,$
$xy \vee x\bar{y} = x, \quad (x \vee y)(x \vee \bar{y}) = x$ (законы склеивания),
$x \vee xy = x$ (закон поглощения).
$xy \vee \bar{x}z = xy \vee \bar{x}z \vee yz$ (закон обобщенного склеивания).

Переменная x_i булевой функции F называется (или фиктивной), если $F(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n) = F(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots, x_n)$, то есть если изменение значения x_i в каждом наборе значений $x_1, x_2, ..., x_n$ не меняет значения функции. При этом существует такая формула, реализующая эту булеву функцию, в которой отсутствует x_i.

Пример. С помощью основных равносильностей доказать, что в булевой функции $F = (x_2 \vee x_2x_3) \to (x_1x_3 \vee x_1\bar{x}_3)$ переменная x_3 является фиктивной.

Решение. Применяя закон поглощения и закон склеивания, получим:
$F = (x_2 \vee x_2x_3) \to (x_1x_3 \vee x_1\bar{x}_3) = x_2 \to x_1$.

Так как существует такая формула, реализующая эту булеву функцию, в которой отсутствует x_3, то эта переменная является фиктивной.

Пример. С помощью таблицы истинности убедиться в справедливости законов де Моргана $\overline{xy} = \bar{x} \vee \bar{y}$.

Решение. Построим таблицу истинности для $\overline{xy}$ и $\bar{x} \vee \bar{y}$.

x	y	xy	$\overline{xy}$	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{x} \vee \bar{y}$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	0	0	0	0

Так как в таблице истинности булевым функциям $\overline{xy}$ и $\bar{x} \vee \bar{y}$ соответствуют одинаковые столбцы, то формулы $\overline{xy}$ и $\bar{x} \vee \bar{y}$ равносильны.

Пример. С помощью основных равносильностей доказать закон обобщенного склеивания $xy \vee \bar{x}z = xy \vee \bar{x}z \vee yz$.

Решение. Применяя закон склеивания (в обратном порядке, то есть $yz = xyz \vee \bar{x}yz$) и дистрибутивность (то есть вынесем за скобки xy и $\bar{x}z$), получим:

$$xy \vee \bar{x}z \vee yz = xy \vee \bar{x}z \vee xyz \vee \bar{x}yz = xy(1 \vee z) \vee \bar{x}z(1 \vee y) = xy \vee \bar{x}z.$$

Пример. С помощью основных равносильностей доказать, что $\overline{y \vee (x\bar{y} \vee \bar{y})} \to x(x \vee xz) = 1$.

Решение. Применяя основные равносильности получим:

$$\overline{y \vee (x\bar{y} \vee \bar{y})} \to x(x \vee xz) = \overline{y \vee \bar{y}} \to xx = \bar{1} \to x = 0 \to x = \bar{0} \vee x = 1 \vee x = 1$$