Задание:

- Изучить теорию: §44 https://file.11klasov.net/3072-algebra-i-nachala-matematicheskogo-analiza-10-11-klassy-bazovyy-i-uglublennyy-urovni-alimov-ash-kolyagin-yum-i-dr.html качать 2016 год);
- Написать краткий конспект;
- Разобрать примеры решения;
- Решить № 550, 552;
- Теория ниже предоставлена в ознакомительных целях (повторение прошлого семестра и наш материал);
- По вопросам обращаться 072-1098278 или hvastov@rambler.ru
- Фотоотчёт конспекта прислать в течении 3 дней со дня получения задания на hvastov@rambler.ru

Нахождение значений тригонометрических функций

Тригонометрические функции имеют широкое применение.

Во-первых, они помогают решать геометрические задачи – рассчитывать треугольники и более сложные фигуры. Кроме того, их можно использовать и в быту, например чтобы понять, пролезет ли кровать в дверной проем или нет (до того, как совершить покупку). Или для того, чтобы оценить высоту дома или дерева, ширину реки.

Но чаще тригонометрические функции применяют для решения технических задач: построения чертежей деталей, зданий, расчета нагрузок на составные части механизма, просчета траектории движения и прочее.

Наконец, с помощью тригонометрических функций можно описывать колебания и волны. Об этих понятиях вы уже знаете из курса физики (урок «Механические колебания», урок «Механические волны. Звук»). Именно с помощью синусов и косинусов можно создать математическую модель различных колебаний: от механических до электромагнитных (урок «Электромагнитные волны и свет»).

Это основные сферы применения тригонометрических функций. Те же, кто собрался посвятить свою жизнь технической профессии, увидят и другие применения этого математического инструмента.

Вы уже знаете различные соотношения для тригонометрических функций, с помощью которых можно вычислить их значения и упростить выражение, которое содержит такие функции. На этом уроке мы займемся отработкой навыков упрощения и вычисления.

Прежде чем начать, вспомним, что для углов существуют две основные единицы измерения: градусы и радианы. Все вычисления вы должны уметь делать как в одних, так и в других единицах измерения. Основное соотношение: $180^\circ = \pi$ радиан. Соответственно, в два раза больший угол: $360^\circ = 2\pi$ радиан; а в два раза меньший – $90^\circ = \frac{\pi}{2}$ радиан. Эти соотношения желательно держать в голове, остальные углы можно перевести из градусов в радианы с помощью пропорции:

$$\alpha = \frac{\alpha^\circ}{180^\circ} \cdot \pi$$

Задание 1.

Известно, что:

$$\cos\alpha = \frac{1}{3}$$

Определить значения синуса, тангенса и котангенса α, если $360° < \alpha < 540°$.

Решение

Зная значение одной тригонометрической функции, всегда можно найти значение всех остальных с точностью до знака. Для этого понадобится основное тригонометрическое тождество:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

А также определения тангенса и котангенса для произвольного угла:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

Используем эти инструменты. Подставим значение косинуса в основное тригонометрическое тождество:

$$\sin^2\alpha + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1$$

Упростив, получим:

$$\sin^2\alpha = 1 - \frac{1}{9}$$

$$\sin^2\alpha = \frac{8}{9}$$

Тогда:

$$\sin\alpha = \pm\sqrt{\frac{8}{9}} = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Мы получили два возможных значения синуса: положительное и отрицательное. Зная дополнительную информацию $360° < \alpha < 540°$, мы можем однозначно выбрать знак. Отмечаем на окружности точки, соответствующие углам $360°$ и $540°$. Угол α находится между ними, т. е. ему соответствуют точки верхней полуокружности (см. рис. 1).

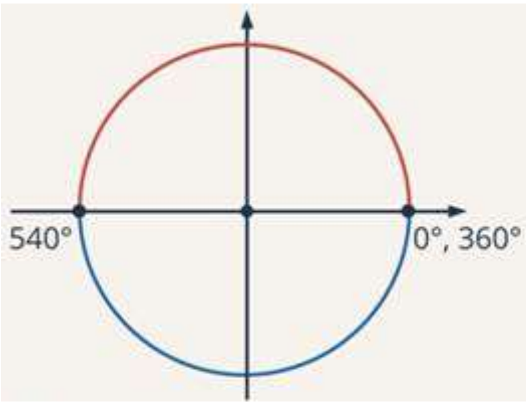

Рис. 1. Иллюстрация к заданию 1

Ординаты всех этих точек положительны, значит, и $\sin\alpha > 0$. Еще говорят так: «угол α лежит в первой или второй четверти. В этих четвертях синус положительный»:

$$\sin\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Осталось найти тангенс и котангенс по определению:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{2\sqrt{2}}{3} : \frac{1}{3} = 2\sqrt{2}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{3} : \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

Ответ: $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$; $\operatorname{tg}\alpha = 2\sqrt{2}$; $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

Задание 2. Найти значение выражения:

$$-4\sqrt{3}\sin(-780^\circ)$$

Решение

Идея решения подобных заданий следующая: преобразовать выражение так, чтобы получить острый угол. А затем найти значение функции по таблице:

Градусы	0°	30°	45°	60°	90°
Радианы	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Для преобразования понадобятся формулы приведения:

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha$$

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$$

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$

$$\cos(\alpha + 180^\circ) = -\cos\alpha$$

$$\sin(\alpha + 180^\circ) = -\sin\alpha$$

$$\cos(\alpha + 360^\circ) = \cos\alpha$$

$$\sin(\alpha + 360^\circ) = \sin\alpha$$

В задании угол отрицательный (-780°), поэтому начинаем с формул для $-\alpha$:

$$-4\sqrt{3}\sin(-780^\circ) = -4\sqrt{3} \cdot (-\sin 780^\circ) = 4\sqrt{3}\sin 780^\circ$$

Теперь убираем из аргумента периоды (добавление и вычитание целого числа периодов не меняет значение функции):

$$4\sqrt{3}\sin 780^\circ = 4\sqrt{3}\sin(420^\circ + 360^\circ) = 4\sqrt{3}\sin 420^\circ = 4\sqrt{3}\sin(60^\circ + 360^\circ) = 4\sqrt{3}\sin 60^\circ$$

По таблице находим:

$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Подставляем в выражение:

$$4\sqrt{3}\sin 60° = 4\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3} = 6$$

Ответ: 6.

Отметим, что период $360°$ (или 2π) для синусов и косинусов мы можем выделять не один раз. Поэтому для больших значений угла удобно его сразу представить в виде $\alpha = 360°\cdot n + x$ (или $\alpha = 2\pi\cdot n + x$ в радианах), где n – некоторое целое число. А для этого следует разделить с остатком значение угла на $360°$.

Например, найдем $\cos 4050°$. Делим с остатком 4050 на 360:

$$4050° = 360°\cdot 11 + 90°$$

Получаем:

$$\cos 4050° = \cos(360°\cdot 11 + 90°) = \cos 90° = 0$$

У тангенсов и котангенсов период равен $180°$ (или π). Соответственно, угол представляем в виде $\alpha = 180°\cdot n + x$ (или $\alpha = \pi\cdot n + x$ в радианах).

Например, вычислим $\operatorname{tg}\frac{13\pi}{3}$:

$$\operatorname{tg}\frac{13\pi}{3} = \operatorname{tg} 4\frac{1}{3}\pi = \operatorname{tg}\left(4\pi + \frac{1}{3}\pi\right) = \operatorname{tg}\frac{1}{3}\pi = \operatorname{tg}\frac{\pi}{3}$$

Для этого угла можем уже воспользоваться таблицей:

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

Упрощение выражений. Формулы приведения

Если в задании с тригонометрическими функциями вам встретились тангенс или котангенс, то лучше сразу расписать их по определению. Это сведет вашу задачу к работе только с синусами и косинусами.

Задание 3. Найти значение выражения:

$$\frac{2\cos\alpha - 4\sin\alpha}{2\sin\alpha + 5\cos\alpha},$$

если $\operatorname{tg}\alpha = 1{,}25$.

Решение

По определению:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

То есть:

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 1{,}25$$

Теперь остались только синусы и косинусы. Из полученного соотношения выразим синус:

$$\sin\alpha = 1{,}25\cos\alpha$$

Теперь подставим это в искомое выражение:

$$\frac{2\cos\alpha - 4\sin\alpha}{2\sin\alpha + 5\cos\alpha} = \frac{2\cos\alpha - 4\cdot 1{,}25\cos\alpha}{2\cdot 1{,}25\cos\alpha + 5\cos\alpha} =$$

Осталось упростить выражение и получить ответ:

$$= \frac{2\cos\alpha - 5\cos\alpha}{2{,}5\cos\alpha + 5\cos\alpha} = \frac{-3\cos\alpha}{7{,}5\cos\alpha} = \frac{-3}{7{,}5} = -0{,}4$$

Ответ: $-0{,}4$.

Другой способ решения

Уменьшить количество различных видов функций в таком выражении можно и другим способом. Если все слагаемые содержат синус и косинус в одинаковой степени, то можно разделить числитель и знаменатель на синус или косинус в этой степени, в данном случае – в первой. Посмотрим, к чему это приведет.

Сразу оговоримся, почему такое деление можно делать. Так как нам дано значение тангенса угла, то косинус этого угла не может равняться 0 (иначе тангенс был бы не определен), а так как тангенс не равен 0, то и синус угла не может равняться 0 (иначе бы тангенс, как отношение синуса и косинуса, тоже был бы равен 0). Поэтому можем смело делить на любую из функций.

Разделим на $\cos\alpha$ и числитель, и знаменатель:

$$\frac{2\cos\alpha - 4\sin\alpha}{2\sin\alpha + 5\cos\alpha} = \frac{2 - 4\operatorname{tg}\alpha}{2\operatorname{tg}\alpha + 5} =$$

Мы получили выражение, которое содержит только тангенс. Осталось подставить его значение из условия:

$$= \frac{2 - 4\cdot 1{,}25}{2\cdot 1{,}25 + 5} = \frac{2 - 5}{2{,}5 + 5} = \frac{-3}{7{,}5} = -0{,}4$$

Задание 4. Упростить выражение:

$$\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2 x} + \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}$$

Решение

Видим тангенс и котангенс – выражаем их через синус и косинус:

$$\frac{1}{1+\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}} + \frac{1}{1+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}$$

Получились многоэтажные дроби. Лучше избавиться от них, заменив черту дроби знаком деления:

$$1:\left(1+\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\right) + 1:\left(1+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\right)$$

Теперь вспоминаем принципы работы с дробями. Сначала приводим к общему знаменателю:

$$1:\left(\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x}\right) + 1:\left(\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}\right)$$

Можно продолжить выполнять операции с дробями. А можно отметить, что в числителях дробей мы видим формулу основного тригонометрического тождества. Можем заменить $\sin^2 x + \cos^2 x$ на 1 – это существенно упростит наше выражение:

$$1 : \frac{1}{\sin^2 x} + 1 : \frac{1}{\cos^2 x}$$

Выполняем деление:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

Ответ: 1.

Кроме основного тригонометрического тождества и определений тангенса и котангенса, вы знаете еще множество формул для работы с тригонометрическими функциями. С их помощью также можно упрощать выражения. Главное – понять, какую формулу нужно использовать. Чем больше практики будет, тем легче вам будет выбрать нужную формулу. Но поначалу не страшно, если выбранный способ решения окажется длинным или не приведет к нужному результату. Тогда нужно вернуться и попробовать использовать другую формулу.

Задание 5. Упростить выражение:

$$\frac{3\sin(\alpha - 9\pi) + \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)}{\sin(\pi - \alpha)}$$

Решение

Упростим каждую из функций по отдельности.

1) $\sin(\alpha - 9\pi)$. Для начала выделим период 2π. Его можно выделить 4 раза:

$$9\pi = 2\pi \cdot 4 + \pi$$

Тогда:

$$\sin(\alpha - 9\pi) = \sin(\alpha - (2\pi \cdot 4 + \pi)) = \sin(\alpha - 2\pi \cdot 4 - \pi) = \sin(\alpha - \pi)$$

У нас есть формула для $\sin(\alpha + \pi)$, а тут $-\pi$. Что делать? Прибавим период; значение функции при этом не изменится:

$$\sin(\alpha - \pi) = \sin(\alpha - \pi + 2\pi) = \sin(\alpha + \pi)$$

Теперь уже можно использовать формулу приведения:

$$\sin(\alpha + \pi) = -\sin\alpha$$

2) $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$. У нас есть формула для $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$. В ней вычитается угол, а в нашем выражении – сложение. Поэтому, чтобы использовать эту формулу, превратим сложение в вычитание:

$$\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (-\alpha)\right)$$

Формулы приведения справедливы для любых углов. Поэтому можем применить ее и для угла $-\alpha$. Получим:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - (-\alpha)\right) = \sin(-\alpha)$$

Использовав еще одну формулу приведения, получим:

$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$

3) $\sin(\pi - \alpha)$. Перепишем это как $\sin(-\alpha + \pi)$. К углу $-\alpha$ прибавляется π, можем использовать соответствующую формулу приведения:

$\sin(-\alpha + \pi) = -\sin(-\alpha)$

Используя еще одну формулу приведения, получим:

$-\sin(-\alpha) = -(-\sin\alpha) = \sin\alpha$

Подставим упрощенные выражения в исходное:

$$\frac{3\sin(\alpha - 9\pi) + \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)}{\sin(\pi - \alpha)} = \frac{-3\sin\alpha - \sin\alpha}{\sin\alpha} = \frac{-4\sin\alpha}{\sin\alpha} = -4$$

Ответ: -4.

Другой способ решения

Все три тригонометрические функции содержат аргумент в виде, к которому можно применить правило «головы лошади»:

1. $3\sin(\alpha - 9\pi) = 3\sin(-9\pi + \alpha) =$

-9π находится там же, где π, плюс альфа, третья четверть, синус отрицательный (см. рис. 2). Диаметр горизонтальный, лошадь мотает головой, функцию не меняем, получаем:

$= -3\sin\alpha$

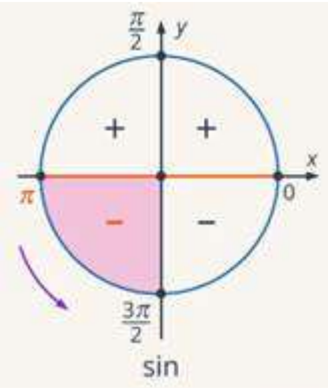

Рис. 2. Иллюстрация к заданию 5

2. $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$

Вторая четверть, косинус отрицательный, диаметр вертикальный (см. рис. 3), меняем функцию, получаем:

$= -\sin\alpha$

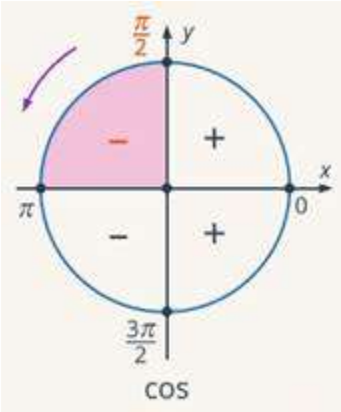

Рис. 3. Иллюстрация к заданию 5

3. $\sin(\pi - \alpha)$

Вторая четверть, синус положительный, диаметр горизонтальный (см. рис. 4), функцию не меняем, получаем:

$= \sin\alpha$

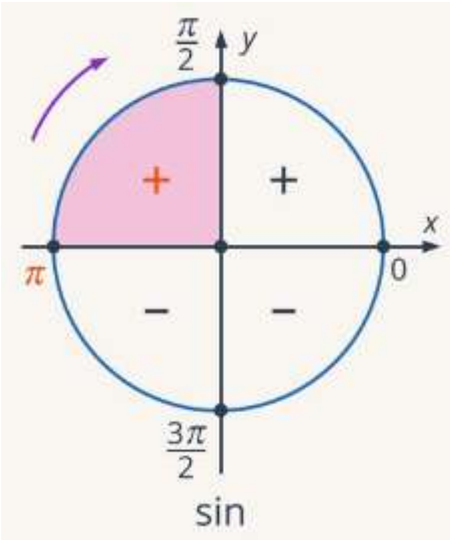

Рис. 4. Иллюстрация к заданию 5

Тогда:

$$\frac{3\sin(\alpha - 9\pi) + \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)}{\sin(\pi - \alpha)} = \frac{-3\sin\alpha - \sin\alpha}{\sin\alpha} = \frac{-4\sin\alpha}{\sin\alpha} = -4$$

Задание 6. Вычислить:

$\operatorname{tg} 13^\circ \cdot \operatorname{tg} 103^\circ$

Решение

В таблице мы не найдем точного значения $\operatorname{tg} 13^\circ$. Конечно, можно вычислить приближенное значение с помощью калькулятора:

$\operatorname{tg} 13^\circ \approx 0{,}231$

Аналогично можно поступить с другим тангенсом и вычислить ответ:

$\operatorname{tg} 103^\circ \approx -4{,}331$

$\operatorname{tg} 13^\circ \cdot \operatorname{tg} 103^\circ \approx 0{,}231 \cdot (-4{,}331) = -1{,}000461$

Но это лишь приближенное значение. Можно ли найти точное? Обратим внимание, что углы отличаются на 90°. Это дает подсказку, что здесь можно использовать формулы приведения:

$$\operatorname{tg} 103^\circ = \operatorname{tg}(90^\circ + 13^\circ)$$

В формуле приведения из 90° вычитается альфа, а тут – прибавляется. Как и в предыдущем примере, сделаем из сложения вычитание:

$$\operatorname{tg}\left(90^\circ - (-13^\circ)\right) = \operatorname{ctg}(-13^\circ)$$

Распишем котангенс по определению, чтобы получить для него формулу приведения:

$$\operatorname{ctg}(-13^\circ) = \frac{\cos(-13^\circ)}{\sin(-13^\circ)} = \frac{\cos 13^\circ}{-\sin 13^\circ} = -\operatorname{ctg} 13^\circ$$

Тогда:

$$\operatorname{tg} 13^\circ \cdot \operatorname{tg} 103^\circ = \operatorname{tg} 13^\circ \cdot (-\operatorname{ctg} 13^\circ) = -1$$

И это уже будет точный, а не приближенный ответ.

Ответ: -1.

Другой способ решения

Ко второму тангенсу применим формулу приведения (используя правило «головы лошади»): $\operatorname{tg} 103^\circ = \operatorname{tg}(90^\circ + 13^\circ) =$ – вторая четверть, тангенс отрицательный, диаметр вертикальный (см. рис. 5), функцию меняем:

$$\operatorname{tg} 13^\circ \cdot \operatorname{tg} 103^\circ = \operatorname{tg} 13^\circ \cdot (-\operatorname{ctg} 13^\circ) = -\operatorname{tg} 13^\circ \cdot \operatorname{ctg} 13^\circ = -1$$

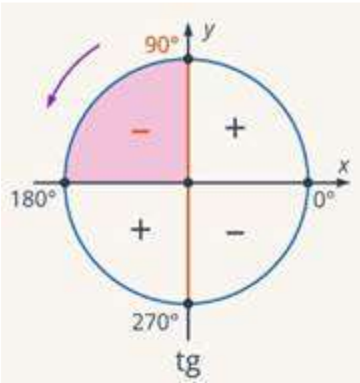

Рис. 5. Иллюстрация к заданию 6

Подведем итоги использования формул приведения.

1. Сначала убираем периоды у функций. Для этого представляем угол в виде: $\alpha = 360^\circ \cdot n + x$ (или $\alpha = 2\pi \cdot n + x$) для косинусов и синусов; $\alpha = 180^\circ \cdot n + x$ (или $\alpha = \pi \cdot n + x$) для тангенсов и котангенсов.

2. Выбираем подходящую формулу приведения. При необходимости прибавляем/вычитаем 1 период, заменяем вычитание сложением или наоборот.

3. При наличии тангенсов/котангенсов расписываем их через синус и косинус, к которым применяем формулы приведения. Или же используем готовые формулы приведения для тангенсов и котангенсов.

4. Формулы приведения можно применять и для расчетов. То, что их нужно применить, подскажет следующее: сумма или разность углов будет равна $90°$ или $180°$.

Формулы двойного и половинного аргумента

Теперь перейдем к формулам двойного аргумента и следствиям из них. Напомним:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

Получить формулы для тангенса и котангенса двойного угла очень просто. Этот прием мы уже неоднократно использовали сегодня в уроке. Расписываем по определению:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{2\sin\alpha \cdot \cos\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}$$

По сути, мы получили формулу для тангенса двойного угла. Ее можно преобразовать и к другому виду, разделив числитель и знаменатель на $\cos^2\alpha \neq 0$:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha}}{\frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}$$

Получилась многоэтажная дробь, разберем ее числитель и знаменатель отдельно:

$$\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{2\sin\alpha}{\cos\alpha} = 2\operatorname{tg}\alpha$$

$$\frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} - \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = 1 - \operatorname{tg}^2\alpha$$

В итоге тангенс двойного угла мы выразили только через тангенс одинарного.

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}$$

Аналогичным образом можно поступить и с котангенсом.

Задание 7. Найти $\operatorname{tg}^2 3\alpha$, если $\cos 6\alpha = 0{,}2$.

Решение

Обратим внимание, что аргументы отличаются в 2 раза. Значит, нам понадобятся формулы двойного угла или же следствия из них – формулы половинного угла.

Способ 1. Попробуем использовать формулы двойного угла:

$$\cos 6\alpha = \cos(2 \cdot 3\alpha) = \cos^2 3\alpha - \sin^2 3\alpha$$

По условию, это выражение равно $0{,}2$:

$$\cos^2 3\alpha - \sin^2 3\alpha = 0{,}2$$

Тут у нас косинус квадрат и синус квадрат. Для них мы знаем еще одно соотношение – основное тригонометрическое тождество:

$$\cos^2 3\alpha + \sin^2 3\alpha = 1$$

Из этих двух соотношений мы можем найти значения $\cos^2 3\alpha$ и $\sin^2 3\alpha$. Сложив их, получим:

$$2\cos^2 3\alpha = 1{,}2$$

$\cos^2 3\alpha = 0{,}6$

Тогда:

$\sin^2 3\alpha = 1 - \cos^2 3\alpha = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$

Требуется найти $\operatorname{tg}^2 3\alpha$. Как обычно, расписываем по определению:

$$\operatorname{tg}^2 3\alpha = \frac{\sin^2 3\alpha}{\cos^2 3\alpha} = \frac{0{,}4}{0{,}6} = \frac{2}{3}$$

Способ 2. Можно использовать формулы половинного аргумента. Тогда $\sin^2 3\alpha$ и $\cos^2 3\alpha$ можно сразу выразить:

$$\sin^2 3\alpha = \frac{1 - \cos 6\alpha}{2} = \frac{1 - 0{,}2}{2} = 0{,}4$$

$$\cos^2 3\alpha = \frac{1 + \cos 6\alpha}{2} = \frac{1 + 0{,}2}{2} = 0{,}6$$

$$\operatorname{tg}^2 3\alpha = \frac{\sin^2 3\alpha}{\cos^2 3\alpha} = \frac{0{,}4}{0{,}6} = \frac{2}{3}$$

Ответ: $\frac{2}{3}$.

Вторым способом получилось быстрее, но нужно помнить больше формул. Каждый сам может выбрать более удобный для себя способ решения: больше запоминать, но быстрее решать или же запоминать меньше, но тогда решение может оказаться длиннее.

Уметь применять формулы двойных аргументов нужно как слева направо, так и справа налево. Слева направо это сделать проще, а вот справа налево их нужно «увидеть». Вспомните: похожая ситуация была с формулами сокращенного умножения. Найти выражение вида $(a+b)^2$ просто: увидел – применил формулу. А вот в обратную сторону выражение вида $a^2 + 2ab + b^2$ нужно еще заметить.

Итак, посмотрим на правые части формул двойных аргументов и подумаем, на что же нам обращать внимание.

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

Для синусов справа стоит произведение синуса и косинуса с одинаковыми аргументами. Именно на это мы будет обращать внимание. Умножить и разделить выражение на 2 – это не проблема. Для косинусов справа стоит разность квадратов. Не путайте с основным тригонометрическим тождеством – там сумма квадратов.

Задание 8. Найти значение выражения:

$$3\sin\frac{11\pi}{12} \cdot \cos\frac{11\pi}{12}$$

Решение

Видим произведение косинуса и синуса одного аргумента. Это показатель того, что нужно применить формулу синуса двойного угла. Не хватает двойки перед выражением. Поэтому умножим и разделим выражение на 2:

$$3\sin\frac{11\pi}{12}\cdot\cos\frac{11\pi}{12}=\frac{3}{2}\cdot 2\sin\frac{11\pi}{12}\cdot\cos\frac{11\pi}{12}=$$

Теперь можем применить формулу:

$$=\frac{3}{2}\cdot\sin\left(2\cdot\frac{11\pi}{12}\right)=\frac{3}{2}\cdot\sin\frac{11\pi}{6}$$

Далее нужно применить формулы приведения. Можете самостоятельно потренироваться это делать. В итоге вы должны получить ответ $-0{,}75$. Если ответ не совпал, смотрите решение ниже.

Ответ: $-0{,}75$.

Использование формул приведения

Выделим в дроби целую часть: $\frac{11\pi}{6}=1\frac{5}{6}\pi=\pi+\frac{5}{6}\pi$

Тогда: $\sin\frac{11\pi}{6}=\sin\left(\pi+\frac{5}{6}\pi\right)=-\sin\frac{5\pi}{6}$

У нас по-прежнему в аргументе не острый угол. Попробуем еще раз выделить π:

$$\frac{5\pi}{6}=\pi-\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{6}+\pi$$

$$-\sin\frac{5\pi}{6}=-\sin\left(-\frac{\pi}{6}+\pi\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

Осталось применить формулу приведения для отрицательных углов и найти значение по таблице:

$$\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}$$

Тогда: $\frac{3}{2}\cdot\sin\frac{11\pi}{6}=\frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{4}=-0{,}75$

Тригонометрические функции суммы и разности

Перейдем к применению формул косинусов и синусов суммы и разности. Они не так часто применяются при упрощениях и вычислениях, как следствия из них – формулы двойных углов. Но несколько полезных применений все же есть.

Во-первых, с помощью них можно получить аналогичные формулы для тангенсов:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}$$

Выводятся они точно так же, как и формулы для тангенса двойного угла. Можете самостоятельно попробовать их получить. Проверить себя можно ниже.

Вывод формул тангенса суммы и разности

По определению:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$$

Применяем формулы косинусов и синусов суммы:

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta}$$

Разделим числитель и знаменатель на $\cos\alpha\cdot\cos\beta\neq 0$. В числителе получим:

$$\frac{\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}=\frac{\sin\alpha\cdot\cos\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}+\frac{\cos\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin\beta}{\cos\beta}=\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta$$

В знаменателе:

$$\frac{\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}=\frac{\cos\alpha\cdot\cos\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}-\frac{\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}=1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta$$

В итоге:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}$$

Чтобы получить формулу разности, запишем:

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\operatorname{tg}(\alpha+(-\beta))=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}(-\beta)}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}(-\beta)}$$

С учетом формул приведения:

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}$$

Как и другие формулы, формулы косинусов и синусов суммы и разности могут помочь при упрощении выражений.

Задание 9. Упростить выражение:

$$\frac{\cos x\cdot\cos y-\cos(x+y)}{\cos(x-y)-\sin x\cdot\sin y}$$

Решение.

Применяем формулы косинуса суммы и разности:

$$\frac{\cos x\cdot\cos y-\cos(x+y)}{\cos(x-y)-\sin x\cdot\sin y}=\frac{\cos x\cdot\cos y-(\cos x\cdot\cos y-\sin x\cdot\sin y)}{\cos x\cdot\cos y-\sin x\cdot\sin y-\sin x\cdot\sin y}=\frac{\sin x\cdot\sin y}{\cos x\cdot\cos y}$$
$$=\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}y$$

Ответ: $\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}y$.

У формулы синуса суммы есть еще один, совсем не очевидный способ применения.

Задание 10. Упростить выражение:

$$\sqrt{3}\cos x + \sin x$$

Решение.

Казалось бы: куда же еще упрощать, тут всего 4 операции для вычисления? Но это можно сделать. Вынесем за скобку число 2. Да, в выражении его нет. Но это не мешает нам каждое слагаемое умножить и поделить на 2:

$$\sqrt{3}\cos x + \sin x = \frac{2\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{2}{2}\sin x = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x\right)$$

Пока не проще. Но подождите: $\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\frac{1}{2}$ – это значения косинусов и синусов из таблицы. Например:

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\frac{\pi}{3}$$

$$\frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$$

Тогда наше выражение равно:

$$2\left(\sin\frac{\pi}{3}\cdot\cos x + \cos\frac{\pi}{3}\cdot\sin x\right)$$

В скобках мы видим синус суммы. Получаем ответ:

$$2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$$

Ответ: $2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.

Это выражение действительно проще – в нем всего 3 операции: сложение, вычисление синуса, умножение.

Данный прием может пригодиться не только при упрощении выражений, но и при решении уравнений, оценке значений, построении графиков. В общем виде его можно представить так.

Пусть имеется выражение вида:

$$a\cos x + b\sin x$$

Выносим за скобки выражение $\sqrt{a^2 + b^2}$:

$$a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2 + b^2}\cdot\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\sin x\right)$$

При этом всегда можно найти такой угол φ, что:

$$\sin\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\cos\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Тогда получим:

$\sqrt{a^2+b^2}\cdot(\sin\varphi\cos x+\cos\varphi\sin x)=\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sin(x+\varphi)$

О том, почему всегда найдется такой угол φ, смотрите ниже.

Условия, что два числа являются косинусом и синусом некоторого угла

Найдем условия того, что два числа являются косинусом и синусом некоторого угла.

Для произвольного угла мы давали определение его синуса и косинуса – это координаты соответствующей точки на единичной окружности (см. рис. 1).

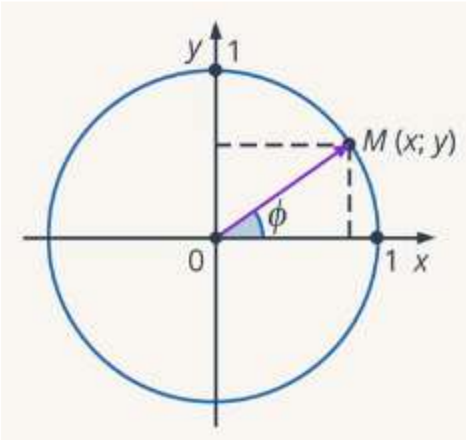

Рис. 1. Синус и косинус произвольного угла – это координаты соответствующей точки на единичной окружности

Верно и обратное: если мы возьмем точку на единичной окружности, то ее координаты – это будут синус и косинус соответствующего угла. Точнее, многих углов – с точностью до периода. Значит, если пара чисел – это координаты точки на единичной окружности, то эти числа будут косинусом и синусом некоторого угла φ.

А какое условие, что точка лежит на единичной окружности? Сумма квадратов ее координат должна равняться 1 (уравнение окружности: $x^2+y^2=1$). Вот и получили условие. Проверим его для выражений $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ и $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$:

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2+\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2=1$$

Возводим в квадрат:

$$\frac{a^2}{a^2+b^2}+\frac{b^2}{a^2+b^2}=1$$

Равенство верное. Значит, всегда найдется такой угол φ, что:

$$\sin\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\cos\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Естественно, это не случайность – мы специально так выбрали выражения, чтобы сумма их квадратов была равна 1.

[Преобразования суммы тригонометрических функций в произведение и наоборот]

В конце нашего занятия мы поговорим о формулах преобразования суммы тригонометрических функций в произведение и наоборот. Как и все предыдущие, они также применяются для упрощения выражений. Конечно, у вас может возникнуть вопрос: «Во что преобразовывать, чтобы упростить выражение: в сумму или в произведение?». Если у вас такой вопрос возник, вспомните, как поступать в таких же ситуациях с рациональными выражениями: когда раскладывать на множители, а когда – раскрывать скобки.

Задание 11. Упростить выражение:

$$\frac{\cos 5\alpha + \cos 6\alpha + \cos 7\alpha}{\sin 5\alpha + \sin 6\alpha + \sin 7\alpha}$$

Решение.

Упростить дробь – значит ее сократить. Для сокращения дроби нужно разложить числитель и знаменатель на множители. То есть нужно преобразовать сумму в произведение. Тут у нас по 3 слагаемых, какие же складывать? Возможны различные варианты, но начинать всегда лучше с симметричных. То есть со сложения $\cos 5\alpha$ и $\cos 7\alpha$ и аналогичных синусов:

$$\cos 5\alpha + \cos 7\alpha = 2\cos\frac{5\alpha + 7\alpha}{2}\cdot\cos\frac{5\alpha - 7\alpha}{2} = 2\cos 6\alpha\cdot\cos(-\alpha) = 2\cos 6\alpha\cdot\cos\alpha$$

$$\sin 5\alpha + \sin 7\alpha = 2\sin\frac{5\alpha + 7\alpha}{2}\cdot\cos\frac{5\alpha - 7\alpha}{2} = 2\sin 6\alpha\cdot\cos(-\alpha) = 2\sin 6\alpha\cdot\cos\alpha$$

Подставим в исходное выражение:

$$\frac{2\cos 6\alpha\cdot\cos\alpha + \cos 6\alpha}{2\sin 6\alpha\cdot\cos\alpha + \sin 6\alpha} =$$

Теперь тут есть общие множители, которые можно вынести за скобки:

$$= \frac{\cos 6\alpha(2\cos\alpha + 1)}{\sin 6\alpha(2\cos\alpha + 1)} = \frac{\cos 6\alpha}{\sin 6\alpha} = \operatorname{ctg} 6\alpha$$

Ответ: $\operatorname{ctg} 6\alpha$.

Задание 12. Доказать тождество:

$$2\cos 3x\cdot\cos x - \cos 2x = \cos 4x$$

Решение.

Для доказательства упростим левую часть равенства и покажем, что она всегда равна правой. Здесь по порядку действия стоит сначала умножение, затем – сложение. Поэтому сначала можем преобразовать только произведение в сумму:

$$2\cos 3x\cdot\cos x = \cos(3x + x) + \cos(3x - x) = \cos 4x + \cos 2x$$

Подставив в левую часть равенства, получим:

$$2\cos 3x\cdot\cos x - \cos 2x = \cos 4x + \cos 2x - \cos 2x = \cos 4x$$

Видим, что после упрощения левая часть равенства тождественно равна правой.

Доказано.