УВАЖАЕМЫЕ СТУДЕНТЫ!

Изучите и законспектируйте новый теоретический материал тезисно по плану лекции, сопровождая конспект записями примеров.

Подготовьте письменные ответы к заданиям к лекции.

Результаты работы, фотоотчет, предоставить преподавателю на e-mail: xvsviv@rambler.ru в трехдневный срок с момента получения задания.

При возникновении вопросов по приведенному материалу обращаться по следующим номерам телефонов:072-138-93-11.

ВНИМАНИЕ!!! При отправке работы, не забывайте указывать ФИО студента, наименование дисциплины, дата проведения занятия (по расписанию).

ЛЕКЦИЯ 1

План

1. Предмет и задачи дискретной математики

2. Составные высказывания

3. Основные логические операции. Формулы логики. Дизъюнктивная конъюнктивная нормальные формы.

1. Предмет и задачи дискретной математики

Дискретная математика (ДМ), или дискретный анализ - область математики, которая занимается исследованиями структур и задач на конечных множествах. Поэтому в качестве синонима иногда используется термин "конечная математика". Можно считать общепринятым деление математики на континуальную (непрерывную) и дискретную. Последняя представляет собой важное направление, имеющее характерные для него предмет исследований, методы и задачи. Специфика задач дискретной математики в первую очередь предполагает отказ от основных понятий

классической математики - предела и непрерывности. Поэтому для задач ДМ обычные средства классического анализа являются вспомогательными.

ДМ - самостоятельное направление современной математики. ДМ изучает математические модели объектов, процессов, зависимостей, существующих в реальном мире, с которыми имеют дело в технике, информатике и других областях знаний.

Дискретная и непрерывная математика взаимно дополняют друг друга. Понятия и методы одной часто используются в другой. Один и тот же объект может рассматриваться с двух точек зрения и в зависимости от этого выбирается непрерывная или дискретная модель. Сегодня ДМ является важным звеном математического образования. Умение проводить анализ, композицию и декомпозицию информационных комплексов и информационных процессов -обязательное квалификационное требование к специалистам в области информатики.

Знание дискретной математики необходимо для создания и эксплуатации интегрированных систем обработки информации и их компонент (математического обеспечения, пакетов прикладных программ, распределенных банков данных, сетей передачи данных, систем с разделением ресурсов и распределенной обработкой информации).

В широком смысле ДМ включает в себя такие сложившиеся математические разделы, как теория множеств и отношений, математическая логика, комбинаторный анализ, а также ряд других, которые стали развиваться наиболее интенсивно в связи с внедрением вычислительной техники. В узком смысле ДМ ограничивается только этими новыми разделами, к которым относятся: теория функциональных систем, теория графов, теория автоматов, теория кодирования, теория алгоритмов и др.

Еще в доньютоновский период появились простейшие понятия комбинаторики (П.Ферма, Б.Паскаль, Франция, XVIII в.). Комбинаторика возникла как основа дискретной теории вероятностей в связи сисследованиями в области азартных игр. Л.Эйлер в середине XVIII в.

закладывает основы теории графов; в середине XIX в. Дж. Буль, опираясь на некоторые идеи Г.Лейбница, придумывает свою "универсальную алгебру" в продолжение наметившегося еще в средние века стремления к формализации аристотелевой логики. Конец XIX в., характеризующийся, с одной стороны, обобщающе-синтетическим подходом к различным разделам математики, а с другой - стремлением к строгости математических обоснований, дает толчок к созданию и быстрому расцвету математической логики.

Основным поставщиком задач и идей для ДМ в XX в. становится кибернетика, а универсальным вычислительным средством – ЭВМ. Задачи анализа и конструирования сложных систем послужили стимулом для разработки теории графов; задачи хранения, обработки и передачи информации привели к теории кодирования (дискретной теории информации); задачи оптимизации вызвали появление дискретного программирования (методы исследования и решения экстремальных задач на конечных множествах); исследование основных понятий вычислительной математики - вычислимости и алгоритма - стимулировало появление теории алгоритмов и теории сложности.

2. Составные высказывания

Основные понятия

В формально-логических выводах используются истинные и ложные предложения.

Определение: повествовательное предложение, о котором можно однозначно сказать, истинно оно или ложно, называется ***высказыванием***.

Примеры высказываний: "кит - животное", "все углы - прямые" и т. п. Первое из этих высказываний является, очевидно, истинным, а второе - ложным. Предложение "реши задачу", также как и "2+2", не является высказываем.

Определения математических понятий не являются высказываниями, т.к. это принятые соглашения.

Будем обозначать высказывания большими латинскими буквами: A, B, C,….

Элементарные, нерасчленяемые высказывания будем называть ***атомами.*** Употребляемые в обычной речи логические связки "и", "или", "если..., то...", "эквивалентно", частица "не" и т. д. позволяют из уже заданных высказываний строить новые, более "сложные" высказывания.

Аналогично тому, как в языке из простых предложений с помощью логических связок образуются сложные предложения, так и в логике высказываний из атомов можно образовывать ***составные высказывания***.

Истинность или ложность получаемых таким образом высказываний зависит от истинности и ложности исходных высказываний и соответствующей трактовки связок как операций над высказываниями.

Рассмотрим определения логических операций, соответствующих логическим связкам.

Каждому высказывания можно сопоставить его ***истинностное значение***, обозначаемое соответственно через И (если высказывание истинно), Л (если высказывание ложно).

Истинностное значение сложных высказываний зависит от истинностных значений высказываний, составлявших слоеное высказывание.

Эта зависимость устанавливается в данных ниже определениях я стращается в таблицах истинности.

Составные высказывания

С помощью рассмотренных в предыдущем пункте логических операций из заданной совокупности атомов (элементарных высказываний) можно строить различимо составные высказывания. Порядок выполнения действий указывается скобками.

Истинностное значение составного высказывания зависит только от истинностных значений образующих его атомов, оно может быть найдено на основании определение логических операций с помощью таблиц истинности.

Пример. $D = \overline{(A \wedge B)} \vee C$.

A	**B**	**C**	$A \wedge B$	$\overline{A \wedge B}$	$D = \overline{(A \wedge B)} \vee C$
И	И	И	И	Л	И
И	И	Л	И	Л	Л
И	Л	И	Л	И	И
И	Л	Л	Л	И	И
Л	И	И	Л	И	И
Л	И	Л	Л	И	И
Л	Л	И	Л	И	И
Л	Л	Л	Л	И	И

3. Основные логические операции. Формулы логики. Дизъюнктивная конъюнктивная нормальные формы.

Логические операции.

Пусть А, В - произвольные высказывания, относительно которых не предполагается, что известно их истинностные значения.

Связке "НЕ" соответствует логическая операция отрицания, обозначение операции – знак $\neg$ или $^{-}$.

Определение. ***Отрицанием*** высказывания А называется высказывание $\overline{A}$ ($\neg$A), которое истинно, если А – ложно, и ложно, если А – истинно.

Таблица истинности отрицания:

A	$\overline{A}$
И	Л
Л	И

Пример: А: 2*2=4 – истинное высказывание; $\overline{A}$: $\overline{2*2=4}$ или 2*2$\neq$4 - ложное высказывание.

Связке "И" соответствует операция конъюнкция, обозначение операции – знак $\wedge$ (или &).

Определение. ***Конъюнкцией*** высказываний А и В называется высказывание $A \wedge B$ (читается "А и В"), которое истинно тогда и только тогда, когда А, В – истинно.

Таблица истинности конъюнкции:

А	**В**	**$A \wedge B$**
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	Л
Л	Л	Л

Пример: А: 5 – нечетное число; В: Пушкин родился в 1799 г – истинные высказывания; поэтому высказывание $A \wedge B$: 5 – нечетное число $\wedge$ Пушкин родился в 1799 г. – истинное высказывание.

Связке "ИЛИ" соответствует операция дизъюнкция, обозначение операции – знак $\vee$.

В формально-логических выводах «или» употребляется не в исключающем смысле (в отличие от обыденной речи, где эта связка может употребляться и в исключающем смысле и в неисключающем смысле)

Определение. ***Дизъюнкцией*** высказываний А и В называется высказывание $A \vee B$ (читается "А или В"), которое ложно тогда и только тогда, когда А, В – ложны.

Таблица истинности дизъюнкции:

А	**В**	**$A \vee B$**
И	И	И
И	Л	И
Л	И	И
Л	Л	Л

Пример. А: 7<10, и.в. В: 3 - число четное, л.в. $A \vee B$: 7<10 $\vee$ 3 - число четное, и.в.

Связке "ЕСЛИ....ТО" соответствует логическая операция импликация, обозначение операции знак →.

Определение. ***Импликацией*** высказываний А и В называется высказывание А→В (читается "если А, то В"), которое ложно тогда и только тогда, когда А – истинно, а В – ложно.

Таблица истинности импликации:

А	**В**	**А→В**
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	И
Л	Л	И

Пример. А: 2*2=5, л. в. В: 2=2, и. в. А→В: 2*2=5→ 2=2. и. в.

Высказывание А называется ***условием*** или ***посылкой***, высказывание В - ***заключением*** или ***следствием импликации***.

Связке "ТОГДА И ТОЛЬКО ТОГДА, КОГДА" соответствует операция эквиваленция, обозначение операция – знак ↔.

Определение. ***Эквиваленцией*** высказываний А и В навивается высказывание, обозначаемое А↔В (читается :"А тогда и только тогда, когда В" или короче: "А эквивалентно В"), которое считается истинным только тогда, когда оба высказывания А и В имеют одинаковое истинностное значение.

Эквивалентность А↔В читается также следующим образом: "Для того, чтобы А, необходимо и достаточно, чтобы В".

Таблица истинности эквиваленции:

А	**В**	**А↔В**
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	Л
Л	Л	И

Пример. А: 7 – число простое; и.в. В: в равнобедренном треугольнике при основании углы равны, и.в. А↔В - и.в.

1) Стрелка Пирса - ↓.

Логическая операция задается таблицей:

p	q	p ↓ q
1	1	0
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Стрелка Пирса является отрицанием дизъюнкции.

2) ***Штрих Шеффера*** - |.

Логическая операция задается таблицей:

p	q	p | q
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1

Штрих Шеффера является отрицанием конъюнкции.

3) Сумма по модулю два - ⊕

Логическая операция задается таблицей:

p	q	p ⊕ q
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Сумма по модулю два является отрицанием эквивалентности

Формулы логики высказываний

Основная задача логики высказываний состоит в изучении логических форм составных высказываний с помощью логических операций.

Понятие логической формы составного высказывания уточняется с помощью вводимого понятия формулы логики высказываний.

Понятие формул логики высказываний определяется следующим образом:

1. Элементарные формулы – атомы – являются формулами логики высказываний.

2. Если A, B – формулы, то $\overline{A}$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$, $(A \leftrightarrow B)$ также являются формулами логики высказываний.

3. только те выражения являются формулами логики высказываний, для которых это следует из 1, 2.

Согласно определения, всякая формула либо атом, либо образуется из атомов в результате применения 2.

Число скобок в формулах можно уменьшить, если опустить внешнюю пару скобок и упорядочить знаки логических операций по старшинству: $\leftrightarrow$, $\rightarrow$, $\vee$, $\wedge$, $\overline{}$.

Знак $\leftrightarrow$ имеет самую большую область действия, знак $\overline{}$ самую маленькую.

Определение. Формулы логики, принимающие значение "истина" при любых значениях атомов, входящих в формулу, называется ***тождественно истинными*** (или законами логики, или тавтологиями).

Например, формула $(A \vee \overline{A})$ всегда тождественно истинна.

Определение. Формулы логики, принимающие всегда ложное значение, называются ***тождественно ложными*** (или противоречиями).

Например, формула $(A \wedge \overline{A})$ - противоречие.

Определение. Формулы алгебры логики, принимающие значение «ложь» хотя бы на одном наборе значений атомов, входящих в формулу называются ***опровержимыми***.

Определение. Формулы алгебры логики, принимающие значение «истина» хотя бы на одном наборе значений атомов, входящих в формулу называются ***выполнимыми***.

Определение. Формулы P и Q называются ***равносильными***, если их истинностные значения совпадают при любом выборе истинностных значений атомов, входящих в эти формулы.

Запись $P \equiv Q$ означает, что формулы P и Q равносильны.

Контрольные вопросы:

1. Дайте определение высказывания.

2. Какие высказывания бывают?

3. Что такое формула алгебры логики? Какие формулы бывают? Приведите примеры.

Задания к лекции:

1. Заданы высказывания «У Алены карие глаза», «8-6=2», «Иван не выучил правила и получил два».

Задание 1. Запишите высказывания с помощью записи высказываний алгебры логики.

Задание 2. Запишите высказывание противоположное высказыванию «У Алены карие глаза». Запишите высказывания с помощью записи высказываний алгебры логики