Задание:

- Изучить теорию;
- Написать краткий конспект;
- Домашнее задание: решить № 276, 277 , 278 (Атанасян Л.С. «Геометрия» 10-11 класс);
- По вопросам обращаться 072-1098278 или hvastov@rambler.ru
- Фотоотчёт конспекта прислать в течении 3 дней со дня получения задания на hvastov@rambler.ru

Тема урока: «Геометрические преобразования пространства: параллельный перенос, симметрия относительно плоскости. Параллельное проектирование»

Цели урока:

Познавательная: обобщение и систематизация знаний по теме «Геометрические преобразования в пространстве»; усвоение обучающимися знаний о симметрии, параллельном переносе и повороте в пространстве, преобразования симметрии, параллельного переноса и поворота в пространстве.
Воспитательная: пробуждение устойчивого интереса к предмету и активизации познавательной деятельности обучающихся; воспитание интереса к своей профессии;
Развивающая: развитие любознательности учащихся, познавательного интереса; развитие памяти; развитие способности обобщать.
Задачи: формировать интерес к изучаемой дисциплине, развивать общеинтеллектуальные умения: сравнение, анализ, обобщение.

Ход урока:

1. Актуализация опорных знаний.

Проводится в форме фронтальной работы с классом.

- Какие преобразования плоскости вы знаете?
- Какое преобразование плоскости называется подобием? *(преобразованием плоскости, при котором расстояния между точками умножаются на одно и то же положительное число).*
- Сформулируйте свойства подобия. *(Подобие переводит отрезки в отрезки, лучи в лучи и прямые в прямые; Подобие сохраняет величину углов).*
- Приведите примеры фигур, которые подобны себе при любом коэффициенте подобия. *(Прямая, луч, полуплоскость, угол).*
- Верно ли, что любые две окружности подобны? *(Да)*

2 . Изучение нового материала.

Учитель: Открывайте тетради, записывайте сегодняшнее число и тему урока «Геометрические преобразования пространства».
Учитель:
1) В алгебре рассматриваются различные функции. Функция f каждому числу x из области определения функции ставит в соответствие некоторое число $f(x)$ – значение функции f в точке x. В геометрии рассматриваются функции, у которых другие области определения и множества значений. Они каждой точке ставят в соответствие точку. Эти функции называются **геометрическими преобразованиями**.
Геометрические преобразования имеют большое значение в геометрии. С помощью геометрических преобразований определяются такие важные геометрические понятия, как равенство и подобие фигур. Благодаря геометрическим преобразованиям, многие разрозненные факты геометрии укладываются в стройную теорию.

Для начала обратимся к некоторым основным понятиям, которые будут необходимы нам для работы с преобразованиями. Остановимся на двух терминах: расстояние и преобразование. Итак, что мы будем понимать под этими словами:

Определение. Расстоянием между двумя точками будем называть длину отрезка с концами в этих точках.

Определение. Преобразованием пространства называется взаимно-однозначное отображение пространства на себя.

Из этого определения следует важный вывод: *при любом преобразовании пространства образы любых двух различных точек пространства различны и любые две различные точки пространства являются образами двух его различных точек*.

Теперь перейдём к рассмотрению отдельных видов геометрических преобразований.

Центральная симметрия:

Введем определение центральной симметрии.

Преобразование пространства, при котором каждая точка пространства отображается на точку, симметричную ей относительно точки O, называется **центральной симметрией** пространства относительно точки O. При этом точка O отображается на себя и называется центром симметрии.

Примерами центральной симметрии являются: автомобильное колесо, окружность, куб, шар, снежинка, цветок и тд.



Движения в пространстве.

Симметрия относительно плоскости (зеркальная симметрия):

Определение. Преобразование пространства, при котором сохраняются расстояния между любыми двумя точками, называется движением пространства.

Свойства: при движении в пространстве прямые переходят в прямые, полупрямые – в полупрямые, отрезки – в отрезки, плоскости – в плоскости; сохраняются углы между полупрямыми.

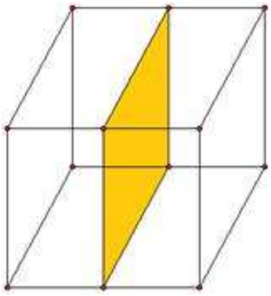
Две фигуры называются равными, если они совмещаются движением.

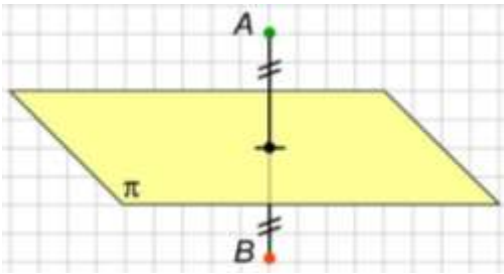
В качестве примера движения пространства на данном этапе изучения стереометрии можно привести преобразование центральной симметрии, доказав координатным способом, что при этой симметрии сохраняются расстояния между точками.

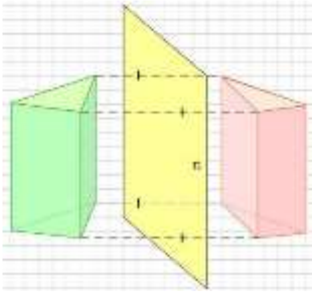
Введем понятие симметрии относительно плоскости:

Определение. Преобразование пространства, при котором каждая точка пространства отображается на точку, симметричную ей относительно плоскости α, называется симметрией пространства относительно плоскости α. Плоскость α называется плоскостью симметрии.

Примеры симметрии относительно плоскости:



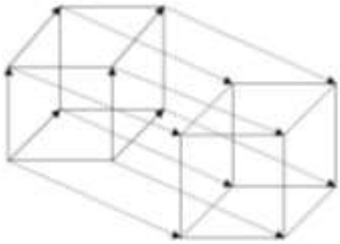


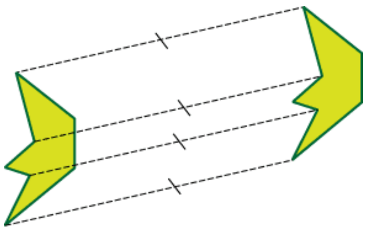


Параллельный перенос:

Определение. Параллельным переносом на вектор называется такое преобразование пространства, при котором любая точка M отображается на такую точку M', что выполняется векторное равенство $\overrightarrow{MM'} = \vec{a}$. Это перенос (движение) всех точек пространства в одном и том же направлении, на одно и то же расстояние

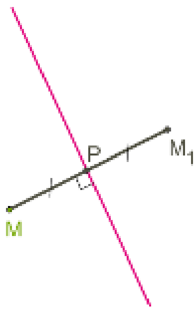
Если плоскость (прямая) не параллельна вектору переноса, то при переносе на этот вектор она отображается на параллельную ей плоскость (прямую).
Примеры параллельного переноса:

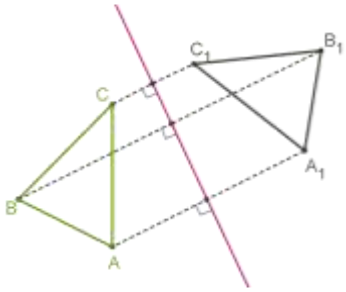




Осевая симметрия:

Определение. Осевая симметрия — это симметрия относительно проведённой прямой (оси).





Подобие:

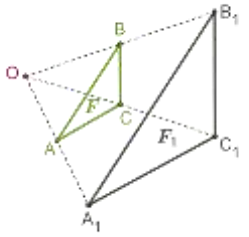
Определение. Преобразования фигуры F в фигуру F' называется преобразования **подобия**, если при этом преобразовании расстояние между точками изменяется в одно и тоже число раз. То есть преобразование, которое сохраняет форму фигуры, но изменяет их размеры.

Гомотетия:

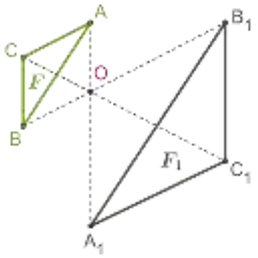
Определение. Гомотетия — это преобразование подобия. Это преобразование, в котором получаются подобные фигуры (фигуры, у которых соответствующие углы равны и стороны пропорциональны).

Чтобы гомотетия была определена, должен быть задан центр гомотетии и коэффициент. Это можно записать: гомотетия $(O;k)$.

На рисунке из фигуры F можно получить фигуру F_1 гомотетией $(O;2)$.



Если фигуры находятся на противоположных направлениях от центра гомотетии, то коэффициент отрицательный.
На следующем рисунке из фигуры F можно получить фигуру F_1 гомотетией $(O;-2)$.



В отличие от гомотетии, геометрические преобразования — центральная симметрия, осевая симметрия, поворот, параллельный перенос являются движением, т.к. в них фигура отображается в фигуру, равную данной.

Гомотетичные фигуры подобны, но подобные фигуры не всегда гомотетичны (в гомотетии важно расположение фигур).
В орнаментах (на рисунке фракталы) можно видеть бесконечное множество подобных фигур, но обычно они не гомотетичны, т.к. у них невозможно определить центр гомотетии.

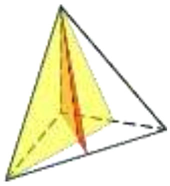
2) Решение примеров на доске:

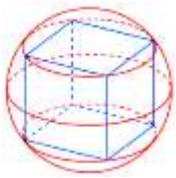
Задача 1. Можно ли взаимно-однозначно отобразить: а) поверхность куба на поверхность другого куба; б) поверхность куба на сферу; Сделайте соответствующие рисунки.

Решение. а) Достаточно кубы расположить так, чтобы совпали их центры, а грани одного были параллельны граням другого. Тогда поверхность одного куба взаимно-однозначно отображается на поверхность другого куба посредством центрального проектирования из их общего центра. (Аналогичная задача планиметрии — о взаимно-однозначном отображении одного квадрата на другой посредством центрального проектирования.)

б) Достаточно центр сферы совместить с центром куба, тогда поверхность куба взаимно-однозначно отображается на сферу посредством центрального проектирования из их общего центра. (Аналогичная задача планиметрии — о взаимно-однозначном отображении квадрата — замкнутой ломаной — на окружность посредством центрального проектирования.)

Задача 2. Нарисуйте треугольную пирамиду, имеющую две плоскости симметрии.





Указание. Рассмотрите пирамиду $PABC$, в которой лишь $AP = BP = AC = BC$.

Параллельное проектирование

Мы уже обсудили основные правила, которые нужно соблюдать при изображении пространственных фигур на плоскости. Теперь у нас есть достаточно фактов, чтобы описать эти правила более формально.

Задача в следующем: есть пространственная фигура, нужно изобразить ее на плоскости (на листе бумаги). Самым простым способом (но не единственным) является **параллельное проектирование**.

Его идея состоит в том, чтобы все точки фигуры переносить параллельно в одну сторону до тех пор, пока они не попадут на плоскость изображения (см. рис. 1). Пример параллельного проектирования – тень на стене от предмета, освещенного солнечными лучами (см. рис. 2).

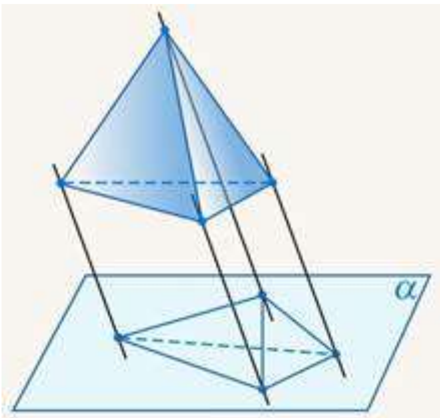


Рис. 1. Изображение пространственной фигуры на плоскости

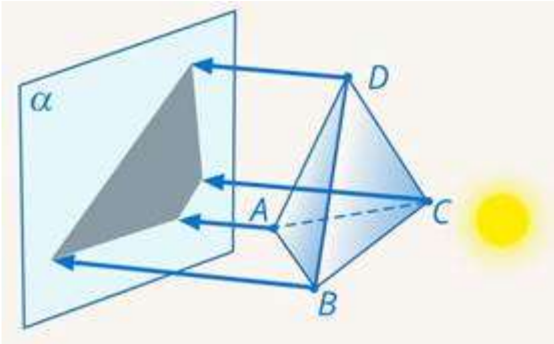


Рис. 2. Тень на стене от предмета, освещенного солнечными лучами

Рассмотрим основные свойства параллельного проектирования. Чтобы начать параллельное проектирование необходимы две вещи.

Плоскость, на которую будем осуществлять проектирование, т. е. на которой будем получать изображение фигуры. Ее так и назовем – **плоскость изображения или плоскость проектирования**. В примере с тенью – это поверхность стены. Направление проектирования. Оно задается прямой, вдоль которой будет происходить проектирование. В примере с тенью это будет любая прямая, расположенная параллельно солнечным лучам. Понятно, что данная прямая не должна быть параллельна плоскости изображения, иначе никакого изображение не получится.

Итак, пусть есть плоскость изображения π и прямая l – направление проектирования (см. рис. 3).

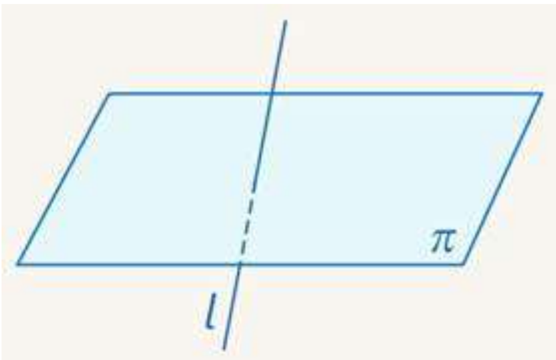


Рис. 3. Плоскость изображения π и направление проектирования l

Рассмотрим точку A_0. Проведем через нее прямую, параллельную l рис 4. Точка A, в которой она пересечется с плоскостью π, называется изображением (проекцией) точки A
.

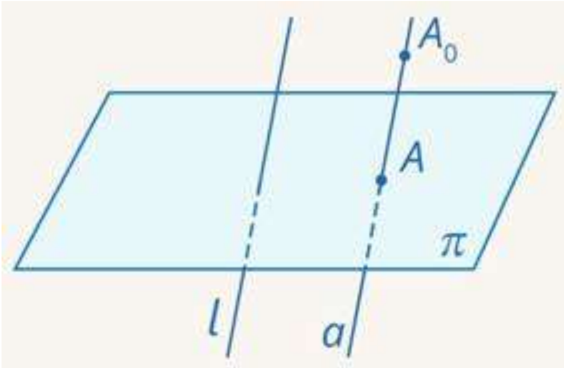


Рис. 4. Через точку A_0 проведена прямая, параллельная l и пересекающая плоскость π в точке A

Если точка принадлежит прямой l, то изображением будет точка пересечения самой прямой l с плоскостью. Если же точка сразу лежит на плоскости, то она сама и будет своим изображением.

Пусть теперь есть некая фигура F_0 (см. рис. 5).

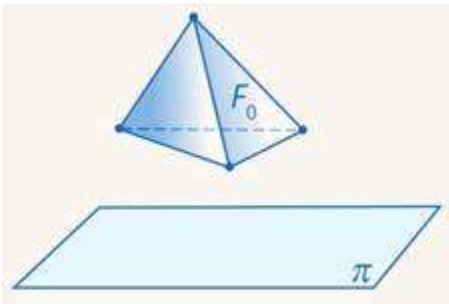


Рис. 5. Фигура F_0

Построим параллельным переносом изображения (проекции) всех точек этой фигуры. Полученная плоская фигура F и будет проекцией исходной фигуры на кость π (см. рис. 6).

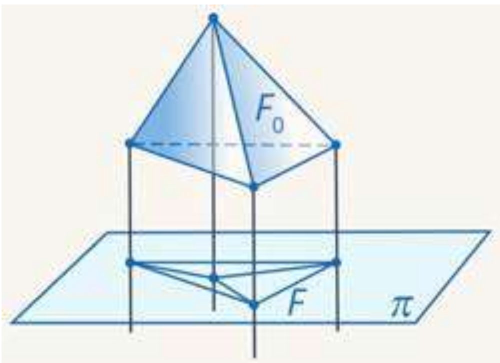


Рис. 6. Полученная плоская фигура F

Рассмотрим, как проецируются прямые и отрезки при условии, что они не параллельны прямой l.

Проекция прямой есть прямая (см. рис. 32).

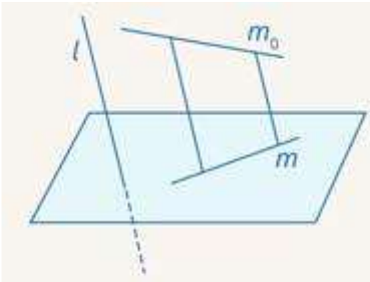


Рис. 7. Проекция прямой

Проекция отрезка есть отрезок (см. рис. 8).

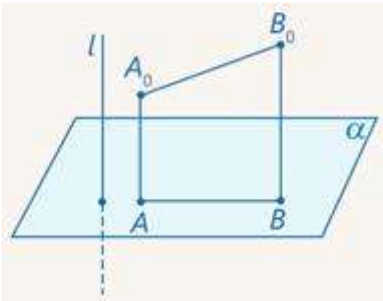


Рис. 8. Проекция отрезка

Параллельные отрезки проецируются в параллельные отрезки (см. рис. 9).

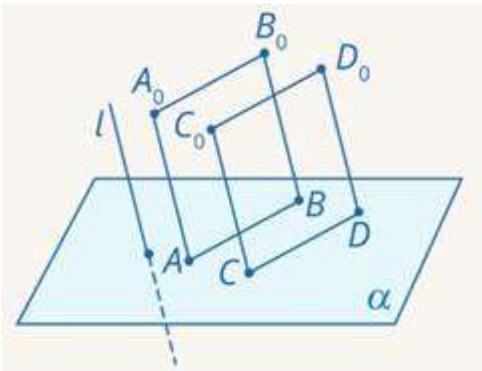


Рис. 9. Проекции параллельных отрезков

Проекции параллельных отрезков пропорциональны самим отрезкам. Это следует непосредственно из теоремы Фалеса (см. рис. 10).

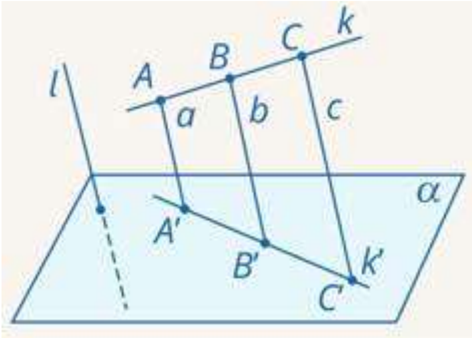


Рис. 11. Проекции параллельных отрезков пропорциональны самим отрезкам

Легко видеть, что если отрезок или прямая параллельны прямой l, то их изображением будет точка. Следовательно, при выборе направления проектирования следует избегать такой ситуации.

Например, если мы делаем параллельную проекцию куба, то если какие-то ребра будут параллельны направлению проектирования, в качестве изображения мы получим квадрат (см. рис. 12). Это формально верное изображение, но вряд ли оно будет для нас информативным.

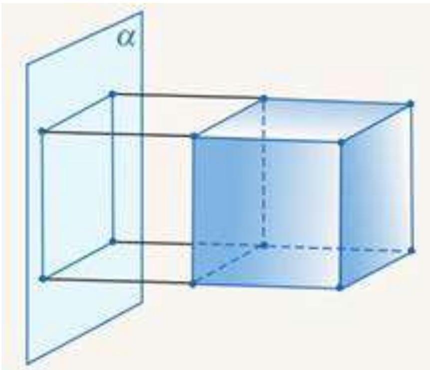


Рис. 12. Параллельная проекция куба

Изображение многогранника сводится к изображению его граней, т. е. плоских фигур.

Исходя из свойств, которые мы перечислили, можно сделать следующие выводы.

1. Любой треугольник изображается любым треугольником (см. рис. 13).

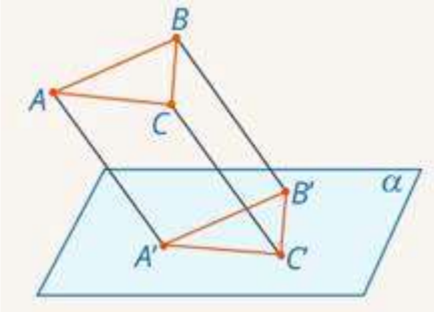


Рис. 13. Параллельная проекция треугольника

2. Параллелограмм изображается параллелограммом, причем прямоугольник и ромб тоже изображаются произвольным параллелограммом (см. рис. 14).

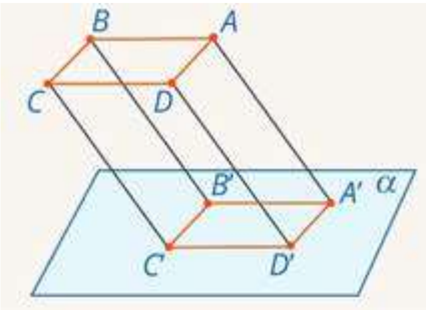


Рис. 14. Параллельная проекция параллелограмма

3. Трапеция изобразится трапецией, но не произвольной. Отношение длин оснований будет сохраняться (см. рис. 15).

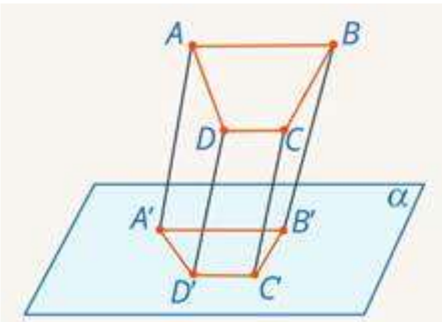


Рис. 15. Параллельная проекция трапеции

4. Проекцией окружности будет эллипс (см. рис. 16).

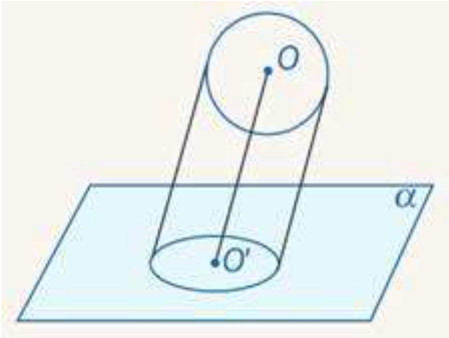


Рис. 17. Параллельная проекция окружности

Теорема

Если плоская фигура лежит в плоскости, параллельной плоскости проекции, то сама фигура и ее изображение будут равными.

Доказательство

В самом деле, пусть для фигуры F проекцией является фигура F' (см. рис. 18).

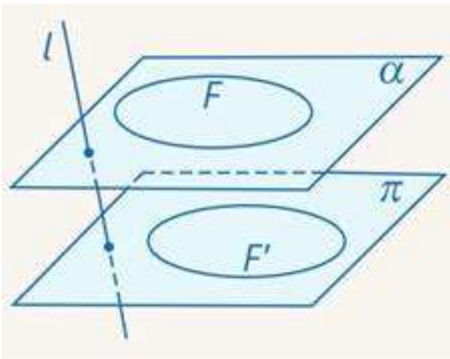


Рис. 18. Иллюстрация к доказательству

Выберем на исходной фигуре F две точки: A и B. Их изображения – A' и B'. Фигура $ABB'A'$ – параллелограмм (см. рис. 19), следовательно, $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$.

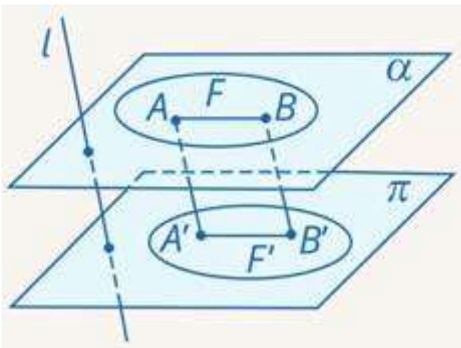


Рис. 19. Иллюстрация к доказательству

Это значит, что вектор $\overrightarrow{AA'}$ переводит любую точку B в ее образ B'. Следовательно, фигуры F и F' конгруэнтны (совпадают при наложении), а это и есть определение равных фигур.

Доказано.

При построении проекций объемных тел изображение видимых ребер сплошными линиями, а невидимых – пунктирными, конечно, не следует из свойств параллельного проектирования. Эта договоренность призвана указать на ориентацию многогранника или иного тела в пространстве.
Если у куба изобразить все ребра сплошными линиями, то не ясно, какая грань ближняя, а какая дальняя. При пристальном взгляде эти грани начинают меняться местами.

Если выбрать, какие ребра не видны, и изобразить их пунктиром, то неопределенностей с ориентацией не возникнет.

Домашнее задание.
№ 276, 277 , 278 (Атанасян Л.С. «Геометрия» 10-11 класс).