Уважаемые студенты!

- Изучите теоретический материал;
- Написать краткий конспект;
- По вопросам обращаться 072-1098278 или hvastov@rambler.ru
- Фотоотчёт конспекта прислать в течение 3 дней со дня получения задания на hvastov@rambler.ru

Вторая производная, её геометрический и физический смысл. Применение производной к исследованию функций и построению графиков. Нахождение скорости для процесса, заданного формулой и графиком.

План

1. Производная второго порядка.
2. Физический смысл второй производной.
3. Геометрический смысл второй производной. Точки перегиба.
4. Исследование функции на экстремум с помощью второй производной.
5. Решение задач

(Учебник: Ш.А. Алимов Алгебра и начала математического анализа 10-11 класс глава IX §53 стр. 283-286)

1. Производная второго порядка.

Пусть функция $y = f(x)$ определена на интервале (a; b), и пусть в каждой точке этого интервала она имеет производную $f'(x)$, тогда $f'(x)$ можно назвать первой производной (или производной первого порядка) данной функции.

Рассмотрим функцию $g(x) = f'(x), x \in (a; b)$. Если $g(x)$ имеет производную в точке $x_0 \in (a; b)$, то эту производную называют второй производной (или производной второго порядка) данной функции $f(x)$ в точке x_0 и обозначают $f''(x_0)$.

Короче, вторая производная – это производная от первой производной, т.е. $y'' = (y')'$ или $f'' = (f')'$.

Производная от $f''(x)$, т.е. $(f'')' = f'''$, называется третьей производной (или производной третьего порядка) данной функции $f(x)$ и т.д.

Определение. Вообще n-й производной (или производного n-го порядка) функции $y = f(x)$ в точке x (или на некотором интервале (a;b)) называется производная от производной (n-1)-го порядка в этой точке x (или на этом интервале (a;b)). Она обозначается $y^{(n)}$ Или $f^{(n)}(x)$.

Примеры

а) Если $f(x) = x^3 + 3x^2 + 1$, то

$f'(x) = 3x^2 + 6x;$

$f''(x) = 6x = 6;$

$f'''(x) = 6;$

$f^{IV}(x) = f^{V}(x) = \cdots = f^{(n)}(x) = 0.$

б) если $y = x \ln x$, то

$y' = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1;$

$y'' = \frac{1}{x};$

$y''' = -\frac{1}{x^2};$

$y^{IV} = \left(-\frac{1}{x^2}\right)' = (-x^2)' = -(-2x^{-3}) = \frac{2}{x^3};$

$y^{V} = \left(\frac{2}{x^3}\right)' = 2 \cdot (x^{-3})' = 2 \cdot (-3) \cdot x^{-4} = -\frac{2 \cdot 3}{x^4};$

$y^{VI} = \left(-\frac{2\cdot 3}{x^4}\right)' = -2\cdot 3\cdot (x^{-4})' = -2\cdot 3\cdot(-4)\cdot x^{-5} = \frac{2\cdot 3\cdot 4}{x^5}$;
и вообще
$y^{(n)} = \frac{(-1)^n\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (n-2)}{x^{n-1}}$, если $n \geq 3$.

2. Физический смысл второй производной.

Пусть материальная точка движется прямолинейно и
$s = s(t), t \in [0; T]$, - закон движения. Тогда скорость v в данный момент времени $t = t_0$ есть производная от пути s по времени t, вычисленная для момента t_0.
$v(t) = s'(t)$ (1)
Ускорение a в данный момент времени $t = t_0$ есть производная от скорости v по времени t, вычисленная для момента t_0.
$a(t) = v'(t)$. (2)
С другой стороны: $a(t) = (s'(t))' = s''(t)$.
$a(t) = s''(t)$. (3)
Физический смысл второй производной:
Ускорение $a(t)$ ***движения в данный момент времени*** t ***есть вторая производная от пути по времени.***

Пример 1
Точка движется прямолинейно по закону $s = 2t^3 + t^2 - 4$. Найти величину скорости и ускорения в момент времени $t_0 = 4$с.
<u>Решение</u>

$$v(t) = s'(t)$$

$$v(t) = (2t^3 + t^2 - 4)' = 2\cdot 3t^2 + 2t = 6t^2 + 2t$$
$$v(4) = s'(4) = 6\cdot 4^2 + 2\cdot 4 = 6\cdot 16 + 8 = 104 \text{ м/с}$$
$$a(t) = s''(t)$$
$$a(t) = s''(t) = (6t^2 + 2t)' = 6\cdot 2t + 2 = 12t + 2$$
$$a(4) = s''(4) = 12\cdot 4 + 2 = 50 \text{ м/с}^2$$
Ответ: 104 м/с, 50 м/с^2.

3. Геометрический смысл второй производной. Точки перегиба.
Условия выпуклости и точки перегиба графика функции
График функции $y = f(x)$ имеет на интервале $(a; b)$ выпуклость, направленную вниз, если он расположен не ниже любых касательных, проведенных к графику функции (рис. 2.14а).

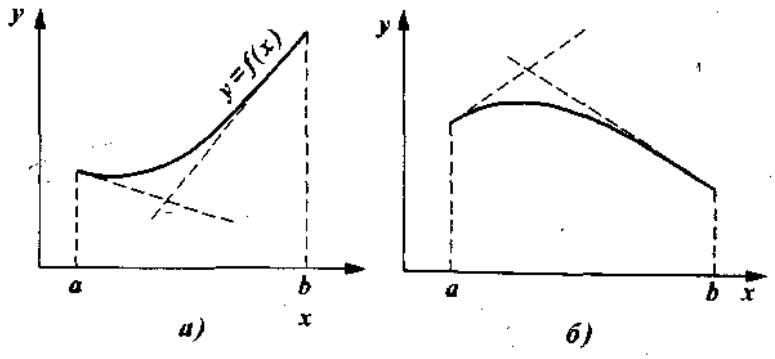

Рис. 2.14. Выпуклость графика функции

Выпуклость, направленная вверх, будет, если график функции $y = f(x)$ на этом интервале расположен не выше любых касательных (рис. 2.14б).

Теорема. *Если функция $y = f(x)$ имеет на интервале $(a; b)$ вторую производную и она положительна $f''(x) \geq 0$, то функция выпукла вниз на этом интервале.*
Если же $f''(x) < 0$, на интервале $(a; b)$, то она выпукла вверх на этом интервале.
Точка перегиба графика непрерывной функции $y = f(x)$ - это точка, при переходе через которую функция меняет направление выпуклости.
Геометрическая интерпретация: в точке перегиба касательная пересекает график функции, так как он переходит с одной стороны касательной на другую, «перегибаясь» через неё (рис. 2.15).

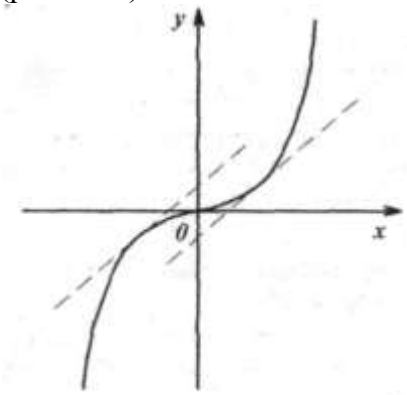

Рис. 2.15. График функции $y = x^3$

Точка x = 0 – точка перегиба кубической параболы
Теорема (необходимое условие существования точки перегиба). Если $x = x_0$ является точкой перегиба функции $y = f(x)$, то вторая производная, если она существует, должна обратиться в нуль: $f''(x_0) = 0$.
Критические точки – это точки графика, для которых $f''(x_0) = 0$.
Теорема (достаточное условие существования точки перегиба). Пусть функция $y = f(x)$ имеет вторую производную в окрестности точки x_0. Эта точка x_0 является точкой перегиба функции, если при переходе через неё вторая производная $f''(x)$ меняет знак.

Пример 2
Найти интервалы выпуклости и точки перегиба функции $f(x) = x^4 - 6x^2 + 3x - 1$.

Решение

Найдём $f'(x) = (x^4)' - 6(x^2)' + 3(x)' - (1)' = 4x^3 - 6 \cdot 2x + 3 = 4x^3 - 12x + 3$,
$f''(x) = (4x^3 - 12x + 3)' = 4 \cdot 3x^2 - 12 = 12x^2 - 12 = 12(x^2 - 1) = 12(x - 1)(x + 1)$.
На интервале $(-\infty; -1)$ $f''(x) > 0$, следовательно, функция $f(x)$ выпукла вниз на этом интервале.
На интервале $(1; \infty)$ $f''(x) > 0$, следовательно, и на этом интервале функция $f(x)$ выпукла вниз.
На интервале $(-1; 1)$ $f''(x) < 0$ и, следовательно, функция $f(x)$ выпукла вверх.
Рассмотрим точку x = -1. При переходе через неё $f''(x)$ меняет знак. Следовательно, x = -1 – это точка перегиба данной функции.
Рассмотрим точку x = 1. Вторая производная $f''(x)$ так же меняет знак. Точка x = 1 – точка перегиба данной функции.

4. Исследование функции на экстремум с помощью второй производной.
Часто бывает рациональнее исследовать функцию на экстремум с помощью второй производной.
Правило исследования функции на экстремум с помощью второй производной:
1. Находят первую производную $f'(x)$.
2. Приравняв к нулю первую производную, находят действительные корни полученного уравнения (т.е. критические значения).
3. Находят вторую производную $f''(x)$.
4. Во вторую производную подставляют поочередно все критические значения; если при этой подстановке вторая производная окажется положительной, то в этой точке функция имеет минимум; если же вторая производная окажется отрицательной, то функция имеет максимум.
5. Вычисляют значения функции в точках максимума и минимума.

Замечание. Если при подстановке критического значения во вторую производную она обратится в нуль, то ничего определенного относительно существования экстремума сказать нельзя, а исследование нужно продолжить с помощью первой производной.

Пример 3

Исследовать на экстремум с помощью второй производной функцию $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 12$.

Решение

1. Находим производную $f'(x) = 3x^2 - 9 \cdot 2x + 24 = 3x^2 - 18x + 24$.
2. Из уравнения $f'(x) = 0$ находим критические значения.
$3x^2 - 18x + 24 = 0, x^2 - 6x + 8 = 0, x_1 = 2, x_2 = 4$.
3. Находим вторую производную $f''(x) = 6x - 18$.
4. Знаки второй производной в критических точках:
$f''(2) = 6 \cdot 2 - 18 = -6, f''(2) < 0,$ следовательно $x = 2 -$ точка максимума ;
$f''(4) = 6 \cdot 4 - 18 = 6, f''(2) > 0,$ следовательно $x = 4 -$ точка минимума .
5. Вычислим значения функции в точках минимума и максимума:
$f_{max} = f(2) = 2^3 - 9 \cdot 2^2 + 24 \cdot 2 - 12 = 8 - 36 + 48 - 12 = 8,$
$f_{min} = f(4) = 4^3 - 9 \cdot 4^2 + 24 \cdot 4 - 12 = 64 - 144 + 96 - 12 = 4.$

Ответ: функция имеет максимум в точке $(2; 8)$ и минимум в точке $(4; 4)$.

5. Задания для самостоятельного решения

Задача 1. (1 балл) Найти производную третьего порядка функции $y = x^4$.

Задача 2. (2 балла) Найдите точки перегиба кривой $f(x) = xe^x$.

Задача 3. (2 балла) Найдите интервалы выпуклости вверх и интервалы выпуклости вниз функции $f(x) = x^4 - 6x^2 + 5$.

Задача 4. (3 балла) Исследовать на экстремум с помощью второй производной функцию $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x$.

Задача 5. (2 балла) В момент времени t тело находится на расстоянии $s = \frac{1}{4}t^4 + 4t^3 + 16t^2$ км от места отправления. Найти его ускорение через 2ч.