Уважаемые студенты!

- Изучите теоретический материал;
- Написать краткий конспект;
- По вопросам обращаться 072-1098278 или hvastov@rambler.ru
- Фотоотчёт конспекта прислать в течение 3 дней со дня получения задания на hvastov@rambler.ru

Тема: Решение уравнений и неравенств с использованием свойств, входящих в них функций

План

1. Введение
2. Использование ОДЗ функций
3. Использование ограниченности функций
4. Использование монотонности
5. Использование графиков

Теоретическая справка.

ОБЛАСТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ.

Если функция задана формулой, то ее область определения – это все значения аргументы, при которых формула имеет смысл. Отсутствие смысла связано, например, со знаменателем, равным нулю, с отрицательным значением подкоренного или подлогарифмического выражения. Решение любого уравнения и неравенства подразумевает использование области определения.

- ОБЛАСТЬ ЗНАЧЕНИЙ. ОГРАНИЧЕННОСТЬ.

Множество всех значений функции называется ее областью значений. Функция называется ограниченной сверху (снизу), если существует такое число C, что $f(x)\leq C$ ($f(x)\geq C$) для любого x из области определения. Функция называется ограниченной, если она ограничена сверху и снизу. Например, синус и косинус - ограничены, показательная функция ограничена снизу и т.д.

- МОНОТОННОСТЬ.

Функция называется строго возрастающей (строго убывающей) на интервале X, если для любых чисел a и b из интервала X выполняется условие: из того, что $a>b$ следует, что $f(a)>f(b)$ ($f(a)<f(b)$). Если функция строго возрастает или строго убывает на всей области определения, говорят, что она монотонна. В этом случае каждое значение функция принимает только один раз.

- НЕПРЕРЫВНОСТЬ.

Функция непрерывна в точке, если предел функции в точке равен ее значению в этой точке. Функции, изучаемые в школе, или непрерывны или имеют конечное число точек разрыва. Причинами разрыва обычно являются наличие знаменателя, который может быть равен нулю, или кусочное задание функции.

Использование ОДЗ

Очевидно, что в большинстве случаев при решении уравнений и неравенств мы учитываем ОДЗ. Полезно помнить о найденном ОДЗ в процессе решения, а не

вспоминать о нем в последний момент. Например, в логарифмических неравенствах с переменным основанием иногда ОДЗ определяет возрастание или убывание логарифма, что позволяет не рассматривать два случая при решении. В задачах, содержащих модуль, ОДЗ может однозначно задавать знак подмодульного выражения.
Иногда знание ОДЗ позволяет доказать, что уравнение (или неравенство) не имеет решений, иногда позволяет найти решения уравнений (или неравенств) непосредственной подстановкой чисел из ОДЗ.

Пример 1. Решить уравнение
$\sqrt{3-x} = \log_5(x-3)$

Решение. ОДЗ этого уравнения состоит из всех х, одновременно удовлетворяющих условиям $3 - x \geq 0$ и $x - 3 > 0$, т. е. ОДЗ есть пустое множество. Этим решение уравнения и завершается, так как установлено, что уравнение не имеет корней.
Ответ: решений нет.
Пример 2. Решить неравенство
$\sqrt[4]{1-x^2} + \sqrt[6]{x^4-1} < 2^x - \log_2(1+x^4)$
Решение. ОДЗ неравенства состоит из всех х, одновременно удовлетворяющих условиям $1 - x^2 \geq 0,\ x^4 - 1 \geq 0$, т.е. О ДЗ состоит из двух чисел $x_1 = 1$ и $x_2 = -1$. Подставляя $x_1 = 1$
в неравенство, получаем, что его левая часть равна 0, правая равна 1, т.е. $x_1 = 1$ есть решение неравенства. Подставляя $x_2 = -1$ в неравенство, получаем что $x_2 = -1$ не является его решением, поскольку левая часть неравенства равна 0, а правая часть равна
-1/2 .
Ответ: X=1.

Использование ограниченности функций.

При решении уравнений и неравенств свойство ограниченности снизу или сверху функции на некотором множестве часто играет определяющую роль.
Решая уравнения sinx=5 или $2^x = -4$, мы говорим, что они не имеют решения, опираясь на ограниченность функций. Но встречаются и более сложные случаи использования ограниченности.

Например, если для всех х из некоторого множества М справедливы неравенства f(x)>A и g(x)<A, где А- некоторое число, то на множестве М уравнение f(x)=g(x) и неравенство f(x)<g(x) решений не имеют.

Заметим, что роль числа А часто играет 0, в этом случае говорят о сохранении знака функций f(x) и g(x) на множестве М.
Рассмотрим задачи, которые практически невозможно решить, не применяя ограниченность.

Пример1. Решить уравнение.
$\cos x + \cos 9x = 2$

Так как $|\cos t| \leq 1$, то чтобы сумма двух косинусов была равна двойке, надо чтобы каждый из них был равен единице.

$\begin{cases} \cos x = 1 \\ \cos 9x = 1 \end{cases}$, откуда

$\begin{cases} x = 2\pi n \\ x = \frac{2\pi k}{9} \end{cases}$ n,k$\in Z$

Ответ: $2\pi n, \quad n \in Z$

Пример2. Решить уравнение
$\sin(x^3 + 2x^2 + 1) = x^2 + 2x + 3$.

Решение. Для любого действительного числа x имеем $\sin(x^3 + 2x^2 + 1) \leq 1$, $x^2 + 2x + 3 = (x+1)^2 + 2 \geq 2$. Поскольку для любого значения x левая часть всегда не меньше двух, то данное уравнение не имеет решений.

Ответ: решений нет.

Пример3. Решить неравенство
$\frac{1-x}{1+x} < 2^x$.

Решение. ОДЗ неравенства есть все действительные x, кроме x=-1.

Разобьём ОДЗ на три множества: $-\infty < x < -1, -1 < x \leq 0, 0 < x < +\infty$ и рассмотрим неравенство на каждом из этих промежутков.

Пусть $-\infty < x < -1$. Для каждого из этих x имеем $g(x) = \frac{1-x}{1+x} < 0$, а $f(x) = 2^x > 0$. Следовательно, все эти x являются решениями неравенства.

Пусть $-1 < x \leq 0$. Для каждого из этих x имеем
$g(x) = 1 - \frac{2x}{1+x} \geq 1$, а $f(x) = 2^x \leq 1$. Следовательно, ни одно из этих x не является решением неравенства.

Пусть $0 < x \leq +\infty$. Для каждого из этих x имеем $g(x) = 1 - \frac{2x}{1+x} < 1$, а $f(x) = 2^x > 1$. Следовательно, все эти x являются решениями неравенства.

Ответ: $-\infty < x < -1, 0 < x \leq +\infty$.

Следующую задачу можно решить иначе, но в этом случае решение будет выглядеть значительно сложнее.

Пример4. При каких значениях a найдутся такие b, что числа $4 + 25^b, a, 5^{-b}$ будут являться последовательными членами геометрической прогрессии?

По характеристическому свойству геометрической прогрессии $a^2 = \frac{5^{2b}+4}{5^b}$.

Введем замену

$5^b = x$ и рассмотрим функцию $f(x) = \frac{x^2+4}{x}$ при x>0. Разделив почленно числитель на знаменатель получим $\frac{x^2+4}{x} = x + \frac{4}{x} \geq 4$ по известному неравенству. Рассматриваемая функция на интервале $(0; +\infty)$ непрерывна и неограниченна сверху, поэтому она принимает все значения из промежутка $[4; +\infty)$. Значит найдутся такие b, при которых $a^2 = \frac{5^{2b}+4}{5b} \geq 4$. Откуда, решая неравенство $a \geq 4$, получим ответ: $\left[\begin{array}{l} a \geq 4 \\ a \leq -4 \end{array}\right.$

Мне встретились несколько задач, в которых вводится совсем неочевидная замена переменной, которая, однако, значительно упрощает решение. В некоторых заданиях ОДЗ или необходимое условие существования решения дает ограничение переменной, которое позволяет сделать тригонометрическую подстановку.

Пример5. При каких а неравенство $\sqrt{1-x^2} > a - x$ имеет решения?
По области определения $-1 \leq x \leq 1$, тогда можно сделать тригонометрическую замену:

x=cost, где $0 \leq t \leq \pi$.

Получим неравенство $\sqrt{1-\cos^2 t} > a - \cos t$ или $|\sin t| > a - \cos t$.

Так как $\sin t \geq 0$, то $\cos t + \sin t > a$

$$\sqrt{2}\sin(t + \frac{\pi}{4}) > a$$

Левая часть неравенства ограничена, наибольшее значение равно $\sqrt{2}$, значит только при $a < \sqrt{2}$ исходное неравенство имеет решение.

Пример6. При каких а и b система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ ax + bx = 1 \end{cases}$$

имеет единственное решение?

Решение: Попробуем сделать тригонометрическую подстановку. Посмотрим на первое уравнение системы.

Так как $|x| \leq 1$ и $|y| \leq 1$, то возможна замена x=sinα, y=cosα, где $\alpha \in [0; 2\pi)$.

Теперь достаточно выяснить при каких а и b уравнение $asin\alpha + bcos\alpha = 1$, где $\alpha \in [0; 2\pi)$, имеет единственное решение. Воспользуемся известным из тригонометрии методом преобразования левой части этого уравнения. Так как случай $a^2 + b^2 = 0$ нас не устраивает, то имеем

$\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\alpha + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\alpha\right) = 1$. Отсюда $\sin(\alpha+\varphi) = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$,

где $\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Заметим, что функция

$f(\alpha) = \sin(\alpha+\varphi)$ на отрезке $[0; 2\pi)$ каждое своё значение, кроме 1 и -1, принимает более одного раза. Поэтому условие единственности решения достигается при $\sqrt{a^2+b^2} = 1$.

Ответ. $a^2 + b^2 = 1$.

Использование монотонности.

Решение уравнений и неравенств с использованием свойства монотонности основывается на следующих утверждениях.

1. Пусть f(x) – непрерывная и строго монотонная функция на промежутке £, тогда уравнение f(x)=C, где C – данная константа, может иметь не более одного решения на промежутке £.
2. Пусть f(x) и g(x) – непрерывные на промежутке £ функции, f(x) строго возрастает, а g(x) строго убывает на этом промежутке, тогда уравнение f(x)=g(x) может иметь не более одного решения на промежутке £.

Доказательство:

Предположим, что общих точек две: (x1,y1), (x2,y2). Так как x1 не равен x2, то предположим, что x1<x2, тогда f(x1)<f(x2). Но f(x1)=g(x1), f(x2)=g(x2), значит g(x1)<g(x2). Получили противоречие с условием, наше предположение неверно, значит, теорема доказана.

Пример1. Решить уравнение

$x \cdot 2^{x^2+2x+3} = 64$.

Решение. Очевидно, что $x \le 0$ не может являться решением уравнения, так как тогда $x \cdot 2^{x^2+2x+3} \le 0$. Для x>0 функция $y = x \cdot 2^{x^2+2x+3}$ непрерывна и строго возрастает, как произведение двух непрерывных положительных строго возрастающих для этих x функций f=x и $g = 2^{x^2+2x+3}$. Значит, в области x>0 функция $y = x \cdot 2^{x^2+2x+3}$ принимает каждое своё значение ровно в одной точке. Легко увидеть, что x=1 является решением уравнения, следовательно, это его единственное решение.

Ответ: x=1.

Пример2. Решить неравенство

$2^x + 3^x + 4^x < 3$.

Решение. Каждая из функций $y = 2^x$, $y = 3^x$, $y = 4^x$, непрерывная и строго возрастающая на всей оси. Значит, такой же является и исходная функция

$y = 2^x + 3^x + 4^x$. Легко увидеть, что при x=0 функция $y = 2^x + 3^x + 4^x$ принимает значение 3. В силу непрерывности и строгой монотонности этой функции при x>0 имеем $2^x + 3^x + 4^x > 3$, при x<0 имеем $2^x + 3^x + 4^x < 3$. Следовательно, решениями неравенства являются все x<0.
Ответ: $-\infty < x < 0$.

Пример3. Решить уравнение
$-\sqrt[8]{x-2} + \sqrt[4]{18-x} = 2$.

Решение. ОДЗ уравнения есть промежуток $2 \leq x \leq 18$. На ОДЗ функции $f(x) = -\sqrt[8]{x-2}$ и $g(x) = \sqrt[4]{18-x}$ непрерывны и строго убывают, следовательно, непрерывна и убывает функция $h(x) = -\sqrt[8]{x-2} + \sqrt[4]{18-x}$. Поэтому каждое своё значение функция h(x) принимает только в одной точке. Так как h(2)=2, то x=2 является единственным корнем исходного уравнения.
Ответ: x=2.

Пример4. Решить уравнение $\sqrt[3]{x} + \sqrt{x-a} = \sqrt[3]{a}$.
Рассмотрим левую часть уравнения как функцию от x. Эта функция монотонно возрастающая на всей области определения и значение, равное числу, стоящему в правой части может принимать только один раз. Значит уравнение может иметь не более одного корня. Легко определить этот корень подбором: x=a.

Пример5. Определить количество корней уравнения $\sqrt{2x+8} - a = -\sqrt{2x+3}$

$\sqrt{2x+8} + \sqrt{2x+3} = a$

Рассмотрим левую часть уравнения как функцию от x. Она монотонно возрастает на области определения $[-1{,}5; +\infty)$. Тогда её область значений $[f(-1{,}5); +\infty)$.
$f(-1{,}5) = \sqrt{5}$, значит уравнение имеет единственное решение для всех $a \geq \sqrt{5}$, при остальных значениях a – решения нет.
Ответ: при $a \geq \sqrt{5}$ - одно решение,

При $a < 5$ - нет решений.

Использование графиков.

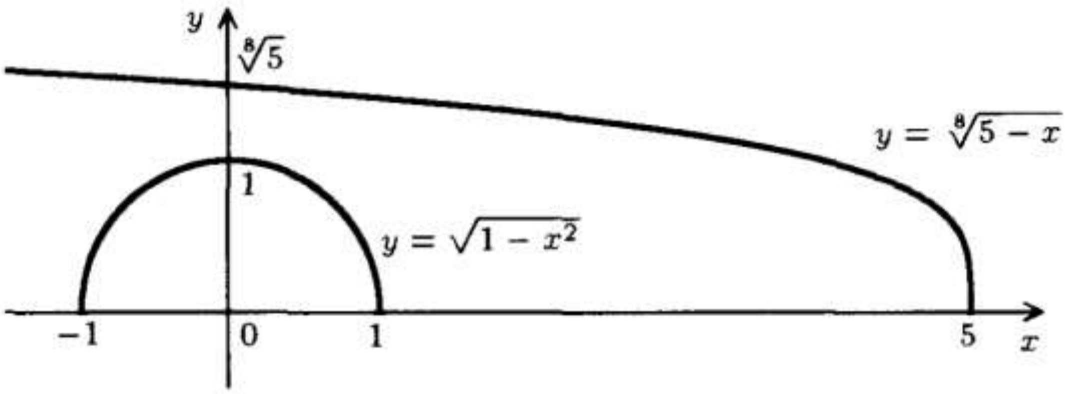
Из всех понятий, связанных с функцией, использование графиков при решении различных задач наиболее очевидно. В школе на уроках мы изучаем графический способ решения уравнений и неравенств, используем параболу при решении задач с параметром на определение положения корней квадратного уравнения относительно заданных чисел. Часто корни уравнений, которые нельзя решить с помощью алгоритмов, можно найти подбором, а графически обосновать их количество. Я не буду останавливаться в работе на задачах, известных из школьного курса алгебры. Тем не менее, мне хочется рассмотреть задания, которые не встречаютя на уроках.

Графический способ даёт приближённое решение, поэтому всегда требует проверки. Делать выводы по чертежу можно только в случае его абсолютной очевидности, что бывает крайне редко. Более того, иногда графики могут ввести нас в заблуждение, так как любой чертёж подразумевает погрешность. Например, по чертежу не всегда возможно определить взаимное расположение прямой и окружности (случай касания) или двух близко расположенных кривых. Вопрос необходимости аналитического обоснования графического решения – это вопрос опыта и интуиции.

При решении уравнений или неравенств иногда полезно рассмотреть эскиз графиков их правой и левой частей. Тогда этот эскиз графиков поможет выяснить, на какие множества надо разбить числовую ось, чтобы на каждом из них решение уравнения или неравенства было очевидно.

Рассмотрим две задачи, где эскиз графика лишь помогает найти решение, но само решение будет аналитическим.

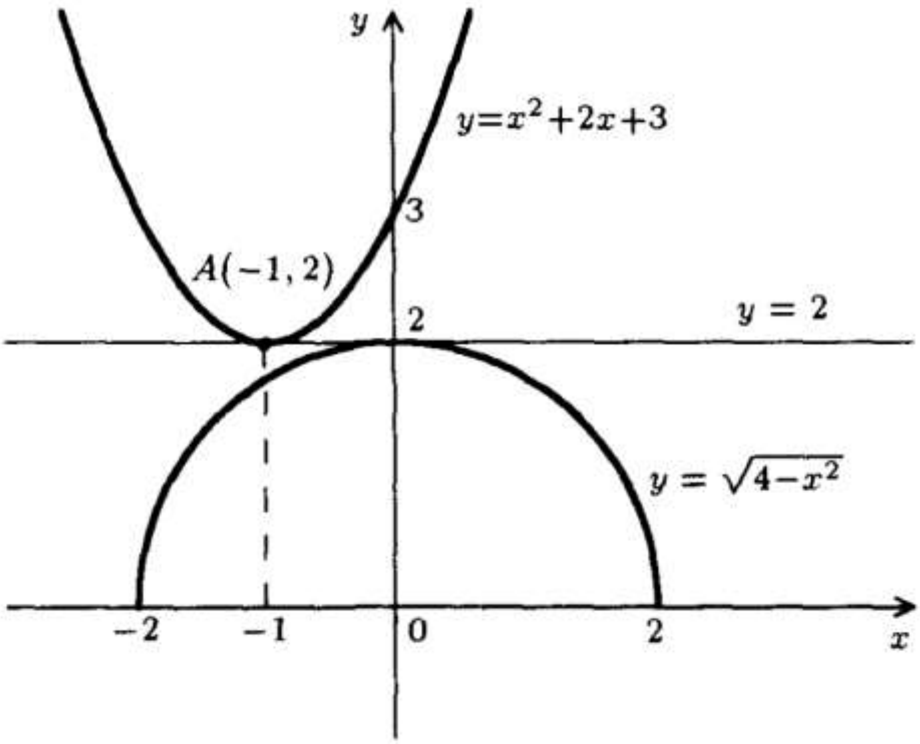
Пример1. Решить неравенство
$\sqrt{1-x^2} < \sqrt[8]{5-x}$.



Решение. ОДЗ неравенства есть все x из промежутка [-1,1]. Эскизы графиков функций $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ и $g(x) = \sqrt[8]{5-x}$ представлены на рисунке. Из графика следует, что для всех x из ОДЗ неравенство справедливо. Докажем это. Для каждого $x \epsilon [-1,1]$ имеем

$0 \leq f(x) \leq 1$, а для каждого такого x имеем, что $\sqrt[8]{5-x} \geq \sqrt[8]{4} > 1$.
Значит, для каждого $x \epsilon [-1,1]$ имеем
$f(x) \leq 1 < g(x)$. Следовательно, решением неравенства будут все x из промежутка [-1,1].
Ответ: $-1 \leq x \leq 1$.

Пример2. Решить уравнение
$x^2 + 2x + 3 = \sqrt{4 - x^2}$.



Решение. ОДЗ уравнения есть все x из промежутка $-2 \leq x \leq 2$. Эскизы графиков функций $f(x) = x^2 + 2x + 3$ и $g(x) = \sqrt{4 - x^2}$ представлены на рисунке. Проведём прямую y=2. Из графика следует, что график функции f(x) лежит не ниже этой прямой, а график функции g(x) не выше. При этом эти графики касаются прямой y=2 в разных точках. Следовательно, уравнение не имеет решений. Докажем это. Для каждого $x \in [-2,2]$ имеем $\sqrt{4 - x^2} \leq 2$, а $x^2 + 2x + 3 = (x+1)^2 + 2 \geq 2$. При этом f(x)=2 только для $x = -1$, а g(x)=2 только для x=0. Это означает, что уравнение не имеет решений.
Ответ: решений нет.

В следующих задачах чертёж будет решением, требующим минимальных аналитических действий.

Пример3. Найти все значения параметра b, при которых уравнение

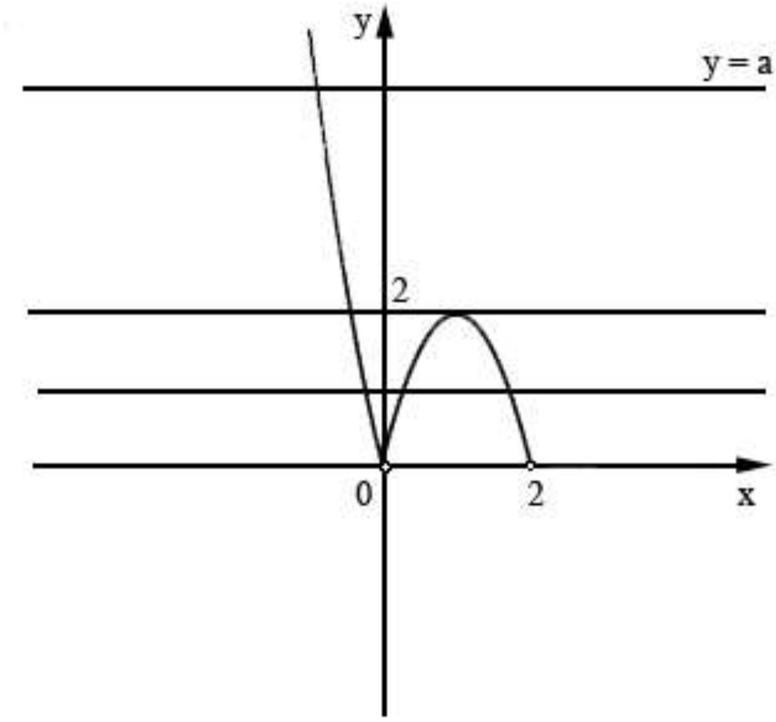
$$\lg 2|x| + \lg(2 - x) - \lg(\lg b) = 0$$

имеет единственное решение.

Решение. Для удобства обозначим lgb= a. Запишем уравнение, равносильное исходному:

$\lg\left(2|\mathrm{x}|(2 - x)\right) = \lg \mathrm{a}$. Переходим к равносильной системе

$$\begin{cases} 2|x|(2 - x) = a \\ x < 2 \\ x \neq 0 \end{cases}$$



Строим график функции $y = 2|x|(2 - x)$ с областью определения $x < 2$ и $x \neq 0$. Полученный график семейство прямых y = a должно пересекать только в одной точке. Из рисунка видно, что это требование выполняется лишь при $a > 2$, т.е. $\lg b > 2$, $b > 100$.

Ответ. $b > 100$.

Пример4. Найти все значения параметра a, при которых система неравенств

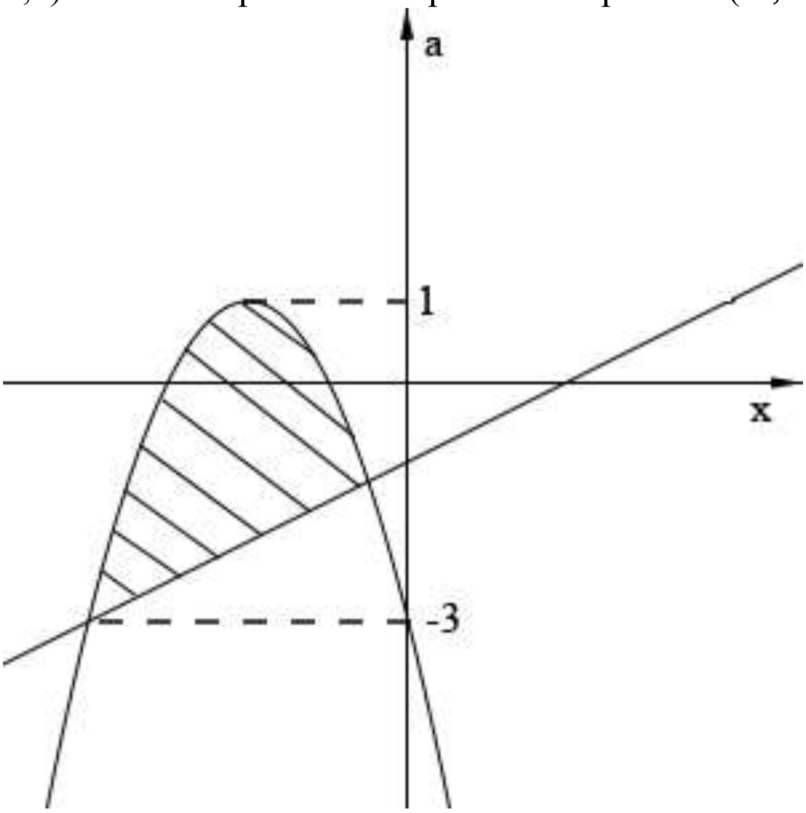
$$\begin{cases} x^2 + a + 4x + 3 \leq 0 \\ 2a - x + 2 \geq 0 \end{cases}$$

Удовлетворяется лишь при одном x.

Выразим a

$$\begin{cases} a \le -x^2 - 4x - 3 \\ a \ge \dfrac{x-2}{2} \end{cases}$$

Изобразим множество точек (x,a), удовлетворяющих данной системе.
Тогда задачу можно переформулировать так: каким значениям a соответствует только одно значение x? Аналитически найдём координаты вершины параболы (-2,1) и точки пересечения прямой и параболы (-4,-3), (-0,5;-1,25).



Из чертежа очевидно, что таких значений a два.
Ответ: a=-3, a=1.

Итак, оказалось, что существует большое количество задач, которые практически невозможно решить без использования свойств функций или при решении которых применение свойств значительно облегчает решение. Применение свойств функций – это важный вспомогательный метод решения уравнений и неравенств, демонстрирующий связь различных областей алгебры.