Задание:

- Изучить теорию;
- Написать краткий конспект;
- Разобрать примеры решения;
- Ответить на вопросы;
- По вопросам обращаться 072-1098278 или hvastov@rambler.ru
- Фотоотчёт конспекта прислать в течении 3 дней со дня получения задания на hvastov@rambler.ru

Тема: Функция одной переменной, ее основные свойства. Основные элементарные функции и их графики.

Цель: Вспомнить основные элементарные функции с одной переменной и их свойства.

Знание **основных элементарных функций, их свойств и графиков** не менее важно, чем знание таблицы умножения. Они как фундамент, на них все основано, из них все строится и к ним все сводится.

В этой статье мы перечислим все основные элементарные функции, приведем их графики и дадим без вывода и доказательств **свойства основных элементарных функций** по схеме:

- область определения функции;
- поведение функции на границах области определения, вертикальные асимптоты (при необходимости смотрите статью классификация точек разрыва функции);
- четность и нечетность;
- область значений функции;
- промежутки возрастания и убывания, точки экстремума;
- промежутки выпуклости (выпуклости вверх) и вогнутости (выпуклости вниз), точки перегиба (при необходимости смотрите статью выпуклость функции, направление выпуклости, точки перегиба, условия выпуклости и перегиба);
- наклонные и горизонтальные асимптоты;
- особые точки функций;
- особые свойства некоторых функций (например, наименьший положительный период у тригонометрических функций).

Основными элементарными функциями являются: постоянная функция (константа), корень *n*-ой степени, степенная функция, показательная, логарифмическая функция, тригонометрические и обратные тригонометрические функции.

План

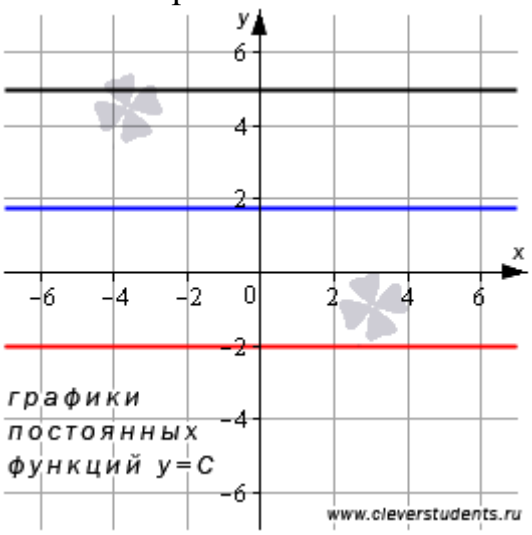
1. Постоянная функция (константа), ее график и свойства. $y = C$
2. Корень *n*-ой степени, свойства и график. $y = \sqrt[n]{x}$
3. Степенная функция, ее график и свойства. $y = x^a$
4. Показательная функция, свойства, график. $y = a^x$

5. Логарифмическая функция, ее свойства, графическая иллюстрация. $y = \log_a(x)$
6. Свойства и графики тригонометрических функций. $y = \sin x,\ y = \cos x,\ y = tgx,\ y = ctgx$
7. Обратные тригонометрические функции (аркфункции), их свойства и графики. $y = \arcsin x,\ y = \arccos x,\ y = arctgx,\ y = arcctgx$

Постоянная функция.

Постоянная функция задается на множестве всех действительных чисел формулой $y = C$, где *C* – некоторое действительное число. Постоянная функция ставит в соответствие каждому действительному значению независимой переменной *x* одно и то же значение зависимой переменной *y* – значение *C*. Постоянную функцию также называют константой.

Графиком постоянной функции является прямая, параллельная оси абсцисс и проходящая через точку с координатами *(0,C)*. Для примера покажем графики постоянных функций *y=5*, *y=-2* и $y = \sqrt{3}$, которым на рисунке, приведенном ниже, отвечают черная, красная и синяя прямые соответственно.



Свойства постоянной функции.

- Область определения: все множество действительных чисел.
- Постоянная функция является четной.
- Область значений: множество, состоящее из единственного числа *C*.
- Постоянная функция невозрастающая и неубывающая (на то она и постоянная).
- Говорить о выпуклости и вогнутости постоянной не имеет смысла.
- Асимптот нет.
- Функция проходит через точку *(0,C)* координатной плоскости.

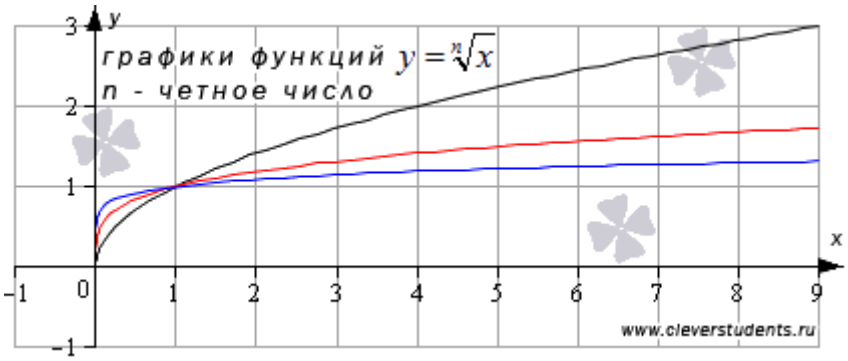
Корень *n*-ой степени.

Рассмотрим основную элементарную функцию, которая задается формулой $y = \sqrt[n]{x}$, где *n* – натуральное число, большее единицы.

Корень *n*-ой степени, *n* - четное число.

Начнем с функции корень *n*-ой степени при четных значениях показателя корня *n*.

Для примера приведем рисунок с изображениями графиков функций $y=\sqrt{x}$, $y=\sqrt[4]{x}$ и $y=\sqrt[8]{x}$, им соответствуют черная, красная и синяя линии.



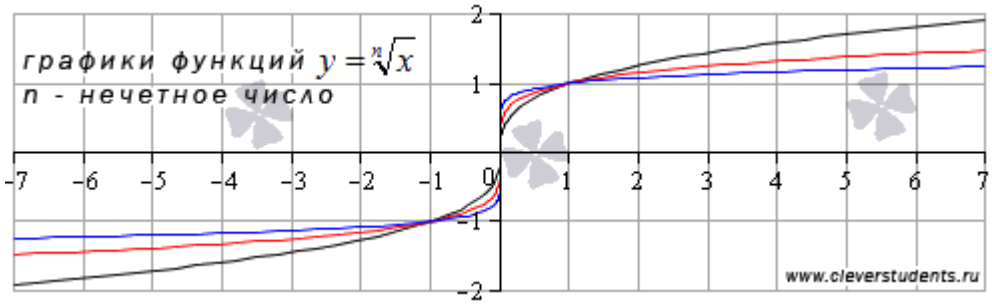
Аналогичный вид имеют графики функций корень четной степени при других значениях показателя.

Свойства функции корень *n*-ой степени при четных *n*.

- Область определения: множество всех неотрицательных действительных чисел $[0,+\infty)$.
- При *x=0* функция $y=\sqrt[n]{x}$ принимает значение, равное нулю.
- Эта функция общего вида (не является четной или нечетной).
- Область значений функции: $[0,+\infty)$.
- Функция $y=\sqrt[n]{x}$ при четных показателях корня возрастает на всей области определения.
- Эта функция имеет выпуклость, направленную вверх, на всей области определения, точек перегиба нет.
- Асимптот нет.
- График функции корень *n*-ой степени при четных *n* проходит через точки *(0,0)* и *(1,1)*.

Корень *n*-ой степени, *n* - нечетное число.

Функция корень *n*-ой степени с нечетным показателем корня *n* определена на всем множестве действительных чисел. Для примера приведем графики функций $y=\sqrt[3]{x}$, $y=\sqrt[5]{x}$ и $y=\sqrt[9]{x}$, им соответствуют черная, красная и синяя кривые.



При других нечетных значениях показателя корня графики функции $y=\sqrt[n]{x}$ будут иметь схожий вид.

Свойства функции корень *n*-ой степени при нечетных *n*.

- Область определения: множество всех действительных чисел.

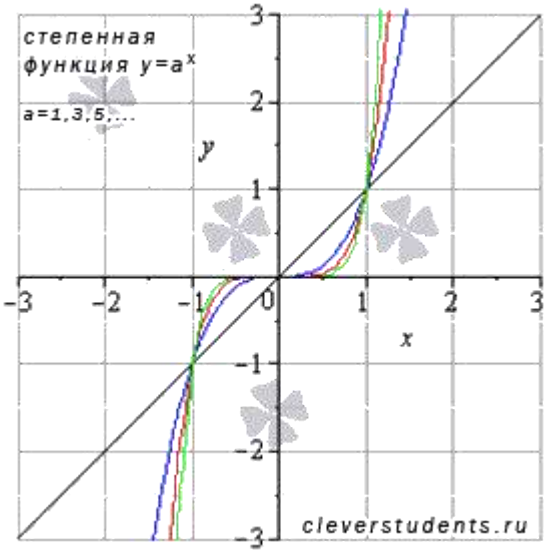
- Эта функция нечетная.
- Область значений функции: множество всех действительных чисел.
- Функция $y=\sqrt[n]{x}$ при нечетных показателях корня возрастает на всей области определения.
- Эта функция вогнутая на промежутке $(-\infty, 0]$ и выпуклая на промежутке $[0, +\infty)$, точка с координатами *(0,0)* – точка перегиба.
- Асимптот нет.
- График функции корень *n*-ой степени при нечетных *n* проходит через точки *(-1,-1)*, *(0,0)* и *(1,1)*.

Степенная функция.

Степенная функция задается формулой вида $y=x^a$.
Рассмотрим вид графиков степенной функции и свойства степенной функции в зависимости от значения показателя степени.
Начнем со степенной функции с целым показателем *a*. В этом случае вид графиков степенных функций и свойства функций зависят от четности или нечетности показателя степени, а также от его знака. Поэтому сначала рассмотрим степенные функции $y=x^a$ при нечетных положительных значениях показателя *a*, далее - при четных положительных, далее - при нечетных отрицательных показателях степени, и, наконец, при четных отрицательных *a*.
Свойства степенных функций с дробными и иррациональными показателями (как и вид графиков таких степенных функций) зависят от значения показателя *a*. Их будем рассматривать, во-первых, при *a* от нуля до единицы, во-вторых, при *a* больших единицы, в-третьих, при *a* от минус единицы до нуля, в-четвертых, при *a* меньших минус единицы.
В заключении этого пункта для полноты картины опишем степенную функцию с нулевым показателем.

Степенная функция с нечетным положительным показателем.

Рассмотрим степенную функцию $y=x^a$ при нечетном положительном показателе степени, то есть, при *a=1,3,5,…*.
На рисунке ниже приведены графики степенных фнукций $y=x$ – черная линия, $y=x^3$ – синяя линия, $y=x^5$ – красная линия, $y=x^7$ – зеленая линия.
При *a=1* имеем *линейную функцию y=x*.



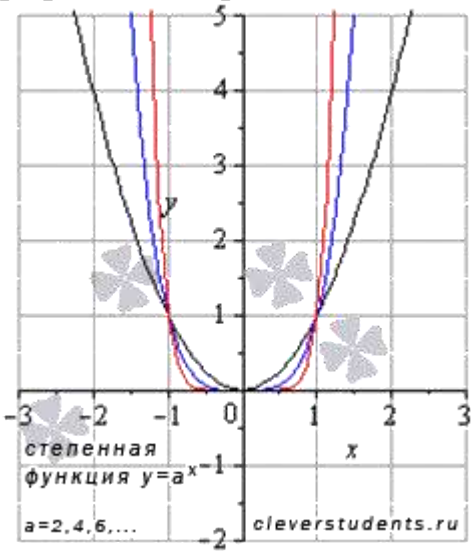
Свойства степенной функции с нечетным положительным показателем.

- Область определения: $x \in (-\infty; +\infty)$.
- Область значений: $y \in (-\infty; +\infty)$.
- Функция нечетная, так как $y(-x) = -y(x)$.
- Функция возрастает при $x \in (-\infty; +\infty)$.
- Функция выпуклая при $x \in (-\infty; 0]$ и вогнутая при $x \in [0; +\infty)$ (кроме линейной функции).
- Точка *(0;0)* является точкой перегиба (кроме линейной функции).
- Асимптот нет.
- Функция проходит через точки *(-1;-1)*, *(0;0)*, *(1;1)*.

Степенная функция с четным положительным показателем.

Рассмотрим степенную функцию $y = x^a$ с четным положительным показателем степени, то есть, при *a=2,4,6,…*.

В качестве примера приведем графики степенных функций $y = x^2$ – черная линия, $y = x^4$ – синяя линия, $y = x^8$ – красная линия. При *a=2* имеем квадратичную функцию, графиком которой является *квадратичная парабола*.

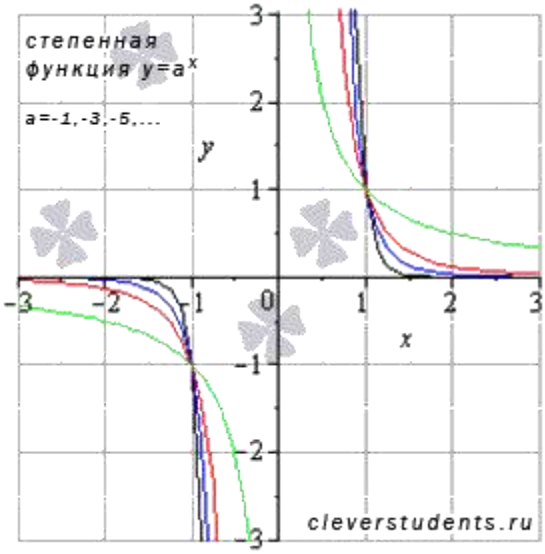


Свойства степенной функции с четным положительным показателем.

- Область определения: $x \in (-\infty; +\infty)$.
- Область значений: $y \in [0; +\infty)$.
- Функция четная, так как $y(-x) = y(x)$.
- Функция возрастает при $x \in [0; +\infty)$, убывает при $x \in (-\infty; 0]$.
- Функция вогнутая при $x \in (-\infty; +\infty)$.
- Точек перегиба нет.
- Асимптот нет.
- Функция проходит через точки *(-1;1), (0;0), (1;1)*.

Степенная функция с нечетным отрицательным показателем.

Посмотрите на графики степенной функции $y = x^a$ при нечетных отрицательных значениях показателя степени, то есть, при *a=-1,-3,-5,…*.



На рисунке в качестве примеров показаны графики степенных функций $y = x^{-9}$ – черная линия, $y = x^{-5}$ – синяя линия, $y = x^{-3}$ – красная линия, $y = x^{-1}$ – зеленая линия. При *a=-1* имеем *обратную пропорциональность*, графиком которой является *гипербола*.

Свойства степенной функции с нечетным отрицательным показателем.

- Область определения: $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

  При *x=0* имеем разрыв второго рода, так как $\lim\limits_{x \to 0-0} x^a = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 0+0} x^a = +\infty$ при *a=-1,-3,-5,…*. Следовательно, прямая *x=0* является вертикальной асимптотой.
- Область значений: $y \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.
- Функция нечетная, так как $y(-x) = -y(x)$.
- Функция убывает при $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.
- Функция выпуклая при $x \in (-\infty; 0)$ и вогнутая при $x \in (0; +\infty)$.
- Точек перегиба нет.

- Горизонтальной асимптотой является прямая *y = 0*, так как

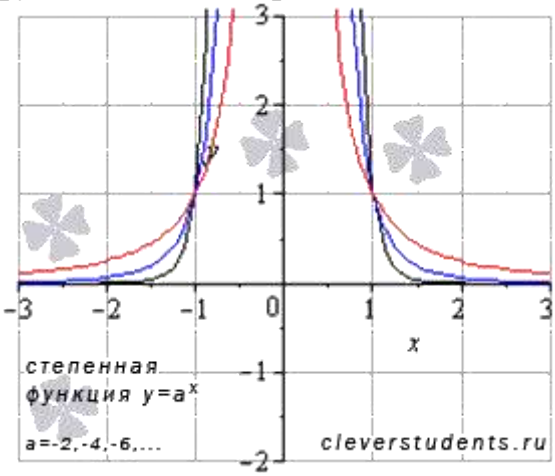
  $$k=\lim_{x\to\infty}\frac{x^a}{x}=0,\quad b=\lim_{x\to\infty}\left(x^a-kx\right)=0\quad\Rightarrow$$

  $$y=kx+b=0$$

  при *a=-1,-3,-5,….*
- Функция проходит через точки *(-1;-1), (1;1).*

Степенная функция с четным отрицательным показателем.

Перейдем к степенной функции $y=x^a$ при *a=-2,-4,-6,….*



На рисунке изображены графики степенных функций $y=x^{-8}$ – черная линия, $y=x^{-4}$ – синяя линия, $y=x^{-2}$ – красная линия.

Свойства степенной функции с четным отрицательным показателем.

- Область определения: $x\in(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$.

  При *x=0* имеем разрыв второго рода, так как $\lim_{x\to0-0}x^a=+\infty,\quad\lim_{x\to0+0}x^a=+\infty$ при *a=-2,-4,-6,….* Следовательно, прямая *x=0* является вертикальной асимптотой.
- Область значений: $y\in(0;+\infty)$.
- Функция четная, так как $y(-x)=y(x)$.
- Функция возрастает при $x\in(-\infty;0)$, убывает при $x\in(0;+\infty)$.
- Функция вогнутая при $x\in(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$.
- Точек перегиба нет.
- Горизонтальной асимптотой является прямая *y=0*, так как

  $$k=\lim_{x\to\infty}\frac{x^a}{x}=0,\quad b=\lim_{x\to\infty}\left(x^a-kx\right)=0\quad\Rightarrow$$

  $$y=kx+b=0$$

  при a=-2,-4,-6,….
- Функция проходит через точки *(-1;1), (1;1).*

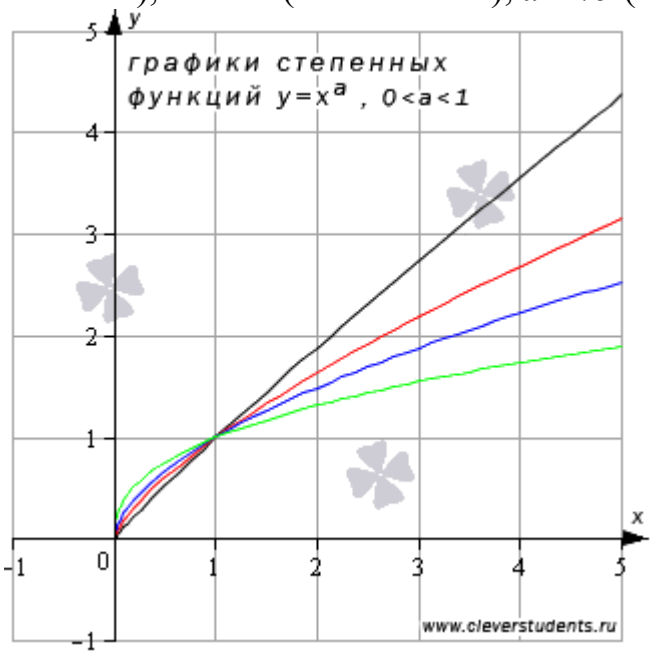
Степенная функция с рациональным или иррациональным показателем, значение которого больше нуля и меньше единицы.

Обратите внимание! Если *a* - положительная дробь с нечетным знаменателем, то некоторые авторы считают областью определения степенной функции

интервал $(-\infty; +\infty)$. При этом оговариваются, что показатель степени *a* – несократимая дробь. Сейчас авторы многих учебников по алгебре и началам анализа НЕ ОПРЕДЕЛЯЮТ степенные функции с показателем в виде дроби с нечетным знаменателем при отрицательных значениях аргумента. Мы будем придерживаться именно такого взгляда, то есть, будем считать областями определения степенных функций с дробными положительными показателями степени множество $[0; +\infty)$. Рекомендуем учащимся узнать взгляд Вашего преподавателя на этот тонкий момент, чтобы избежать разногласий.

Рассмотрим степенную функцию $y = x^a$ с рациональным или иррациональным показателем *a*, причем $0 < a < 1$.

Приведем графики степенных функций $y = x^a$ при *a=11/12* (черная линия), *a=5/7* (красная линия), $a = \frac{1}{\sqrt{3}}$ (синяя линия), *a=2/5* (зеленая линия).



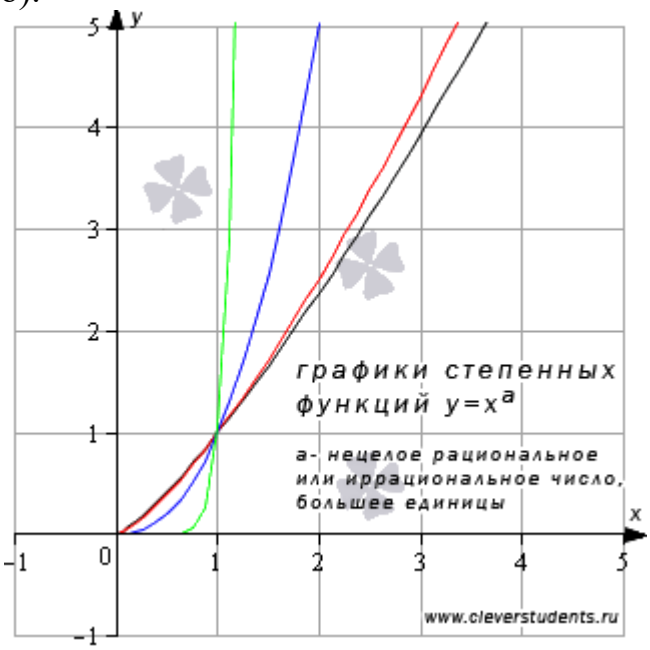
При других значениях показателя степени *a*, $0 < a < 1$ графики функции $y = x^a$ будут иметь схожий вид.

Свойства степенной функции при $0 < a < 1$.

- Область определения: $x \in [0; +\infty)$.
- Область значений: $y \in [0; +\infty)$.
- Функция не является ни четной, ни нечетной, то есть она общего вида.
- Функция возрастает при $x \in [0; +\infty)$.
- Функция выпуклая при $x \in (0; +\infty)$.
- Точек перегиба нет.
- Асимптот нет.
- Функция проходит через точки *(0;0), (1;1)*.

Степенная функция с нецелым рациональным или иррациональным показателем, большим единицы.

Рассмотрим степенную функцию $y = x^a$ с нецелым рациональным или иррациональным показателем *a*, причем $a > 1$.
Приведем графики степенных функций, заданных формулами $y = x^{\frac{5}{4}}, \quad y = x^{\frac{4}{3}}, \quad y = x^{\frac{7}{3}}, \quad y = x^{3\pi}$ (черная, красная, синяя и зеленая линии соответственно).



При других значениях показателя степени *a*, $a > 1$ графики функции $y = x^a$ будут иметь схожий вид.

Свойства степенной функции при $a > 1$.

- Область определения: $x \in [0; +\infty)$.
- Область значений: $y \in [0; +\infty)$.
- Функция не является ни четной, ни нечетной, то есть она общего вида.
- Функция возрастает при $x \in [0; +\infty)$.
- Функция вогнутая при $x \in (0; +\infty)$, если $1 < a < 2$; при $x \in [0; +\infty)$, если $a > 2$.
- Точек перегиба нет.
- Асимптот нет.
- Функция проходит через точки *(0;0), (1;1)*.

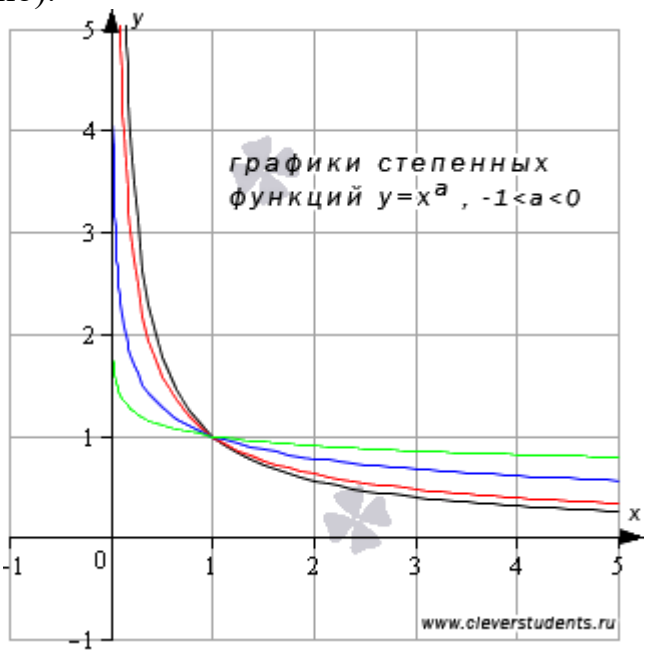
Степенная функция с действительным показателем, который больше минус единицы и меньше нуля.

Обратите внимание! Если *a* - отрицательная дробь с нечетным знаменателем, то некоторые авторы считают областью определения степенной функции интервал $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. При этом оговариваются, что показатель степени *a* – несократимая дробь. Сейчас авторы многих учебников по алгебре и началам анализа НЕ ОПРЕДЕЛЯЮТ степенные функции с показателем в виде дроби с нечетным знаменателем при отрицательных значениях аргумента. Мы будем придерживаться именно такого взгляда, то есть, будем считать областями определения степенных функций с дробными дробными отрицательными

показателями степени множество $(0;+\infty)$ соответственно. Рекомендуем учащимся узнать взгляд Вашего преподавателя на этот тонкий момент, чтобы избежать разногласий.

Переходим к степенной функции $y=x^a$, кгода $-1<a<0$.

Чтобы хорошо представлять вид графиков степенных функций при $-1<a<0$, приведем примеры графиков функций $y=x^{-\frac{5}{6}}$, $y=x^{-\frac{2}{3}}$, $y=x^{-\frac{1}{2\sqrt{2}}}$, $y=x^{-\frac{1}{7}}$ (черная, красная, синяя и зеленая кривые соответственно).

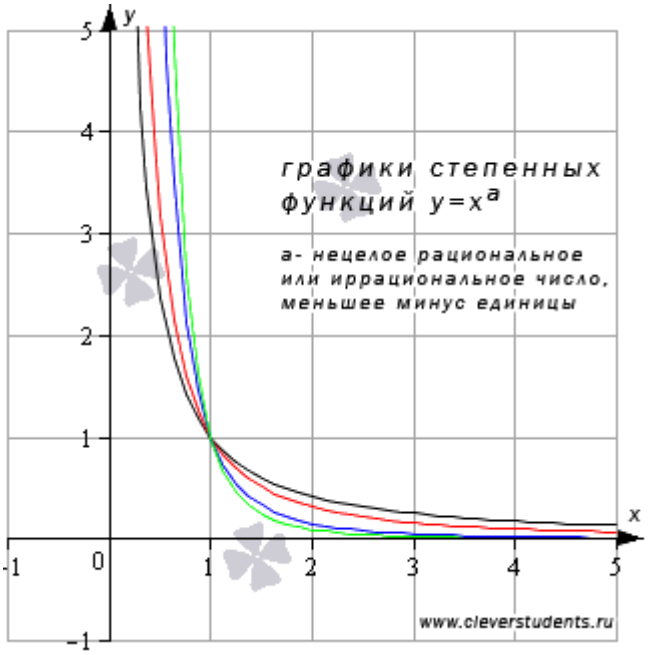


Свойства степенной функции с показателем *a*, $-1<a<0$.

- Область определения: $x\in(0;+\infty)$.
  $\lim\limits_{x\to 0+0} x^a=+\infty$ при $-1<a<0$, следовательно, *x=0* является вертикальной асимптотой.
- Область значений: $y\in(0;+\infty)$.
- Функция не является ни четной, ни нечетной, то есть она общего вида.
- Функция убывает при $x\in(0;+\infty)$.
- Функция вогнутая при $x\in(0;+\infty)$.
- Точек перегиба нет.
- Горизонтальной асимптотой является прямая *y=0*.
- Функция проходит через точку *(1;1)*.

Степенная функция с нецелым действительным показателем, который меньше минус единицы.

Приведем примеры графиков степенных функций $y=x^a$ при $y=x^{-\frac{5}{4}}$, $y=x^{-\frac{5}{3}}$, $y=x^{-e}$, $y=x^{-\frac{24}{7}}$, они изображены черной, красной, синей и зеленой линиями соответственно.



Свойства степенной функции с нецелым отрицательным показателем, меньшим минус единицы.

- Область определения: $x \in (0;+\infty)$.
  $\lim\limits_{x \to 0+0} x^a = +\infty$ при $a < -1$, следовательно, *x=0* является вертикальной асимптотой.
- Область значений: $y \in (0; +\infty)$.
- Функция не является ни четной, ни нечетной, то есть она общего вида.
- Функция убывает при $x \in (0;+\infty)$.
- Функция вогнутая при $x \in (0;+\infty)$.
- Точек перегиба нет.
- Горизонтальной асимптотой является прямая *y=0*.
- Функция проходит через точку *(1;1)*.

При *a=0* и $x \neq 0$ имеем функцию $y = x^0 = 1$ - это прямая из которой исключена точка *(0;1)* (выражению 0^0 условились не придавать никакого значения).

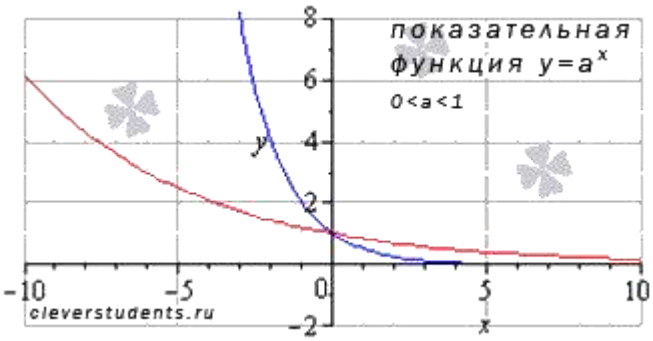
Показательная функция.

Одной из основных элементарных функций является показательная функция.

График показательной функции $y = a^x$, где $a > 0$ и $a \neq 1$ принимает различный вид в зависимости от значения основания *a*. Разберемся в этим.

Сначала рассмотрим случай, когда основание показательной функции принимает значение от нуля до единицы, то есть, $0 < a < 1$.

Для примера приведем графики показательной функции при *a = 1/2* – синяя линия, *a = 5/6* – красная линия. Аналогичный вид имеют графики показательной функции при других значениях основания из интервала $0 < a < 1$.

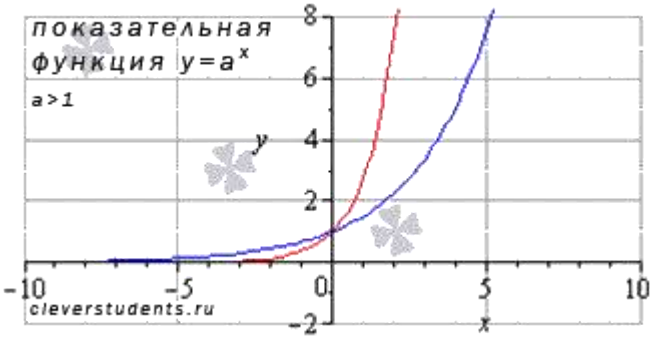


Свойства показательной функции с основанием меньшим единицы.

- Областью определения показательной функции является все множество действительнйх чисел: $x \in (-\infty; +\infty)$.
- Область значений: $y \in (0; +\infty)$.
- Функция не является ни четной, ни нечетной, то есть, она общего вида.
- Показательная функция, основание которой меньше единицы, убывает на всей области определения.
- Функция вогнутая при $x \in (-\infty; +\infty)$.
- Точек перегиба нет.
- Горизонтальной асимптотой является прямая *y = 0* при *x* стремящемся к плюс бесконечности.
- Функция проходит через точку *(0;1)*.

Переходим к случаю, когда основание показательной функции больше единицы, то есть, $a > 1$.

В качестве иллюстрации приведем графики показательных функций $y = \left(\frac{3}{2}\right)^x$ – синяя линия и $y = e^x$ – красная линия. При других значениях основания, больших единицы, графики показательной функции будут иметь схожий вид.



Свойства показательной функции с основанием большим единицы.

- Область определения показательной функции: $x \in (-\infty; +\infty)$.
- Область значений: $y \in (0; +\infty)$.
- Функция не является ни четной, ни нечетной, то есть она общего вида.
- Показательная функция, основание которой больше единицы, возрастает при $x \in (-\infty; +\infty)$.
- Функция вогнутая при $x \in (-\infty; +\infty)$.
- Точек перегиба нет.

- Горизонтальной асимптотой является прямая *y = 0* при *x* стремящемся к минус бесконечности.
- Функция проходит через точку *(0;1)*.

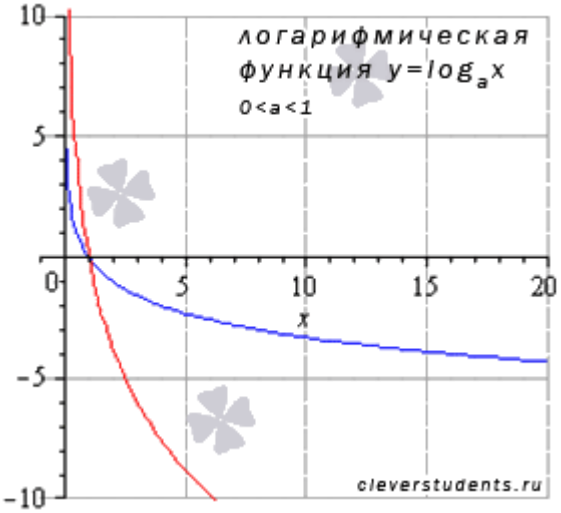
Логарифмическая функция.

Следующей основной элементарной функцией является логарифмическая функция $y = \log_a(x)$, где $a > 0$, $a \neq 1$. Логарифмическая функция определена лишь для положительных значений аргумента, то есть, при $x \in (0;+\infty)$.

График логарифмической функции принимает различный вид в зависимости от значения основания *a*.

Начнем со случая, когда $0 < a < 1$.

Для примера приведем графики логарифмической функции при *a = 1/2* – синяя линия, *a = 5/6* – красная линия. При других значениях основания, не превосходящих единицы, графики логарифмической функции будут иметь схожий вид.

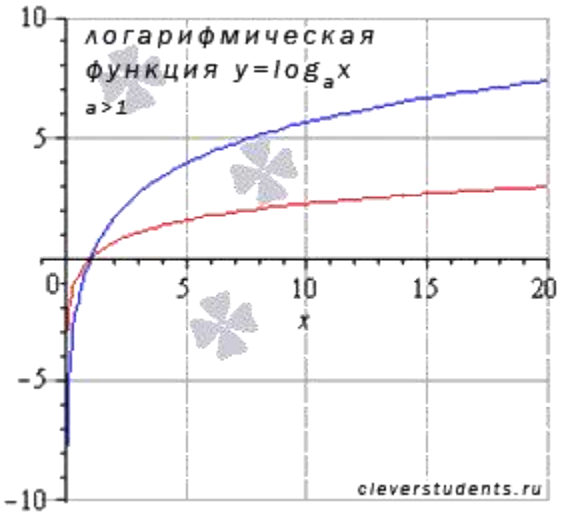


Свойства логарифмической функции с основанием меньшим единицы.

- Область определения логарифмической функции: $x \in (0;+\infty)$.
  При *x* стремящемся к нулю справа, значения функции стремятся к плюс бесконечности.
- Область значений: $y \in (-\infty; +\infty)$.
- Функция не является ни четной, ни нечетной, то есть она общего вида.
- Логарифмическая функция убывает на всей области определения.
- Функция вогнутая при $x \in (0;+\infty)$.
- Точек перегиба нет.
- Горизонтальных асимптот нет.
- Функция проходит через точку *(1;0)*.

Перейдем к случаю, когда основание логарифмической функции больше единицы ($a > 1$).

Покажем графики логарифмических функций $y = \log_{\frac{3}{2}} x$ – синяя линия, $y = \ln x$ – красная линия. При других значениях основания, больших единицы, графики логарифмической функции будут иметь схожий вид.



Свойства логарифмической функции с основанием большим единицы.

- Область определения: $x \in (0;+\infty)$. При *x* стремящемся к нулю справа, значения функции стремятся к минус бесконечности.
- Областю значений логарифмической функции является все множество действительных чисел, то есть, интервал $y \in (-\infty;+\infty)$.
- Функция не является ни четной, ни нечетной, то есть она общего вида.
- Функция возрастает при $x \in (0;+\infty)$.
- Функция выпуклая при $x \in (0;+\infty)$.
- Точек перегиба нет.
- Горизонтальных асимптот нет.
- Функция проходит через точку *(1;0)*.

Тригонометрические функции, их свойства и графики.

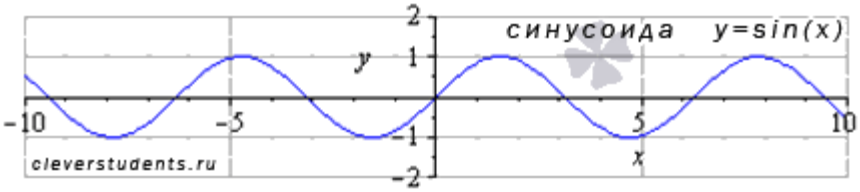
Все тригонометрические функции (синус, косинус, тангенс и котангенс) относятся к основным элементарным функциям. Сейчас мы рассмотрим их графики и перечислим свойства.

Тригонометрическим функциям присуще понятие *периодичности* (повторяемости значений функции при различных значениях аргумента, отличных друг от друга на величину периода $f(x+T)=f(x)$, где T - период), поэтому, в список свойств тригонометрических функций добавлен пункт *«наименьший положительный период»*. Также для каждой тригонометрической функции мы укажем значения аргумента, при которых соответствующая функция обращается в ноль.

Теперь разберемся со всеми тригонометрическими функциями по порядку.

Функция синус *y = sin(x)*.

Изобразим график функции синус, его называют "синусоида".



Свойства функции синус *y = sinx*.

- Областью определения функции синус является все множество действительных чисел, то есть, функция *y = sinx* определена при $x \in (-\infty;+\infty)$.
- Наименьший положительный период функции синуса равен двум пи: $T=2\pi$.

- Функция обращается в ноль при $x = \pi \cdot k$, где $k \in Z$, Z – множество целых чисел.
- Функция синус принимает значения из интервала от минус единицы до единицы включительно, то есть, ее область значений есть $y \in [-1; 1]$.
- Функция синус - нечетная, так как $y(-x) = -y(x)$.
- Функция убывает при $x \in \left[\frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi \cdot k\right], \quad k \in Z$,

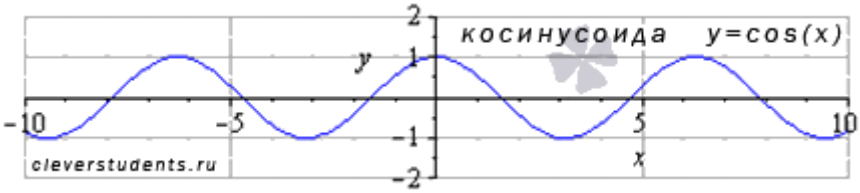
  возрастает при $x \in \left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot k; \frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot k\right], \quad k \in Z$.
- Функция синус имеет локальные максимумы в точках $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot k; 1\right)$,

  локальные минимумы в точках $\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot k; -1\right), \quad k \in Z$.
- Функция $y = sinx$ вогнутая при $x \in [-\pi + 2\pi \cdot k; 2\pi \cdot k], \quad k \in Z$,

  выпуклая при $x \in [2\pi \cdot k; \pi + 2\pi \cdot k], \quad k \in Z$.
- Координаты точек перегиба $(\pi \cdot k; 0), \quad k \in Z$.
- Асимптот нет.

Функция косинус *y = cos(x)*.

График функции косинус (его называют "косинусоида") имеет вид:



Свойства функции косинус *y = cosx*.

- Область определения функции косинус: $x \in (-\infty; +\infty)$.
- Наименьший положительный период функции $y = cosx$ равен двум пи: $T = 2\pi$.
- Функция обращается в ноль при $x = \frac{\pi}{2} + \pi \cdot k$, где $k \in Z$, Z – множество целых чисел.
- Область значений функции косинус представляет интервал от минус единицы до единицы включительно: $y \in [-1; 1]$.
- Функция косинус - четная, так как $y(-x) = y(x)$.
- Функция убывает при $x \in [2\pi \cdot k; \pi + 2\pi \cdot k], \quad k \in Z$,

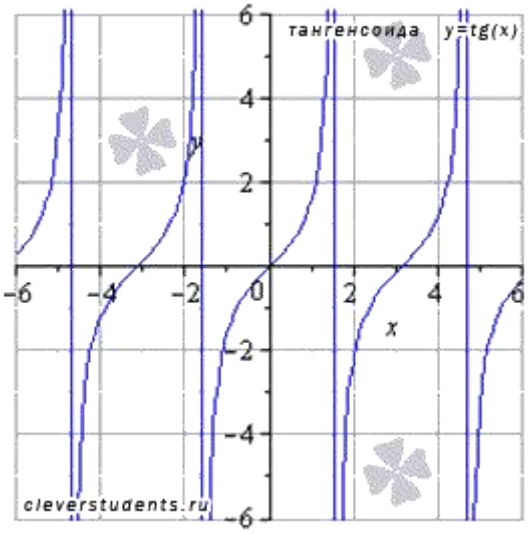
  возрастает при $x \in [-\pi + 2\pi \cdot k; 2\pi \cdot k], \quad k \in Z$.
- Функция $y = cosx$ имеет локальные максимумы в точках $(2\pi \cdot k; 1), \quad k \in Z$,

  локальные минимумы в точках $(\pi + 2\pi \cdot k; -1), \quad k \in Z$.

- Функция вогнутая при $x \in \left[\frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi \cdot k\right], \quad k \in Z$, выпуклая при $x \in \left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot k; \frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot k\right], \quad k \in Z$.
- Координаты точек перегиба $\left(\frac{\pi}{2} + \pi \cdot k; 0\right), \quad k \in Z$.
- Асимптот нет.

Функция тангенс *y = tg(x)*.

График функции тангенс (его называют "тангенсоида") имеет вид:



Свойства функции тангенс *y = tgx*.

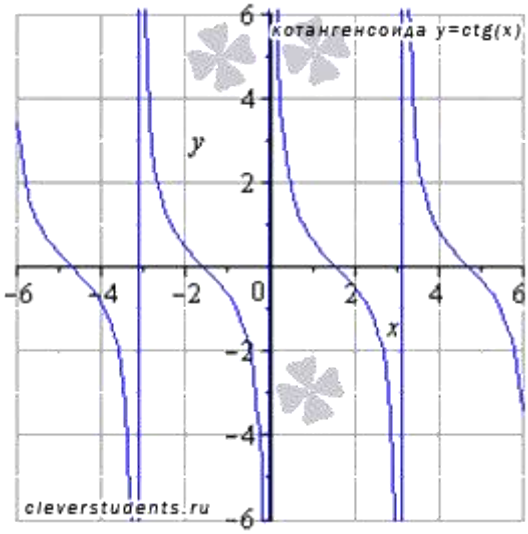
- Область определения функции тангенс: $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi \cdot k; \frac{\pi}{2} + \pi \cdot k\right)$, где $k \in Z$, Z – множество целых чисел.
  Поведение функции *y = tgx* на границе области определения $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2} + \pi \cdot k + 0} tg(x) = -\infty, \quad \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2} + \pi \cdot k - 0} tg(x) = +\infty$
  Следовательно, прямые $x = \frac{\pi}{2} + \pi \cdot k$, где $k \in Z$, являются вертикальными асимптотами.
- Наименьший положительный период функции тангенс $T = \pi$.
- Функция обращается в ноль при $x = \pi \cdot k$, где $k \in Z$, Z – множество целых чисел.
- Область значений функции *y = tgx*: $y \in (-\infty; +\infty)$.
- Функция тангенс - нечетная, так как $y(-x) = -y(x)$.
- Функция возрастает при $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi \cdot k; \frac{\pi}{2} + \pi \cdot k\right), \quad k \in Z$.

- Функция вогнутая при $x \in \left[\pi \cdot k; \frac{\pi}{2} + \pi \cdot k\right), \quad k \in Z$,

  выпуклая при $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi \cdot k; \pi \cdot k\right], \quad k \in Z$.
- Координаты точек перегиба $(\pi \cdot k; 0), \quad k \in Z$.
- Наклонных и горизонтальных асимптот нет.

Функция котангенс *y = ctg(x)*.

Изобразим график функции котангенс (его называют "котангенсоида"):



Свойства функции котангенс *y = ctgx*.

- Область определения функции котангенс: $x \in (\pi \cdot k; \pi + \pi \cdot k)$, где $k \in Z$, Z – множество целых чисел.

  Поведение на границе области определения $\lim\limits_{x \to \pi \cdot k + 0} tg(x) = +\infty, \quad \lim\limits_{x \to \pi \cdot k - 0} tg(x) = -\infty$

  Следовательно, прямые $x = \pi \cdot k$, где $k \in Z$ являются вертикальными асимптотами.
- Наименьший положительный период функции *y = ctgx* равен пи: $T = \pi$.
- Функция обращается в ноль при $x = \frac{\pi}{2} + \pi \cdot k$, где $k \in Z$, Z – множество целых чисел.
- Область значений функции котангенс: $y \in (-\infty; +\infty)$.
- Функция нечетная, так как $y(-x) = -y(x)$.
- Функция *y = ctgx* убывает при $x \in (\pi \cdot k; \pi + \pi \cdot k), \quad k \in Z$.
- Функция котангенс вогнутая при $x \in \left(\pi \cdot k; \frac{\pi}{2} + \pi \cdot k\right], \quad k \in Z$,

  выпуклая при $x \in \left[-\frac{\pi}{2} + \pi \cdot k; \pi \cdot k\right), \quad k \in Z$.
- Координаты точек перегиба $\left(\frac{\pi}{2} + \pi \cdot k; 0\right), \quad k \in Z$.

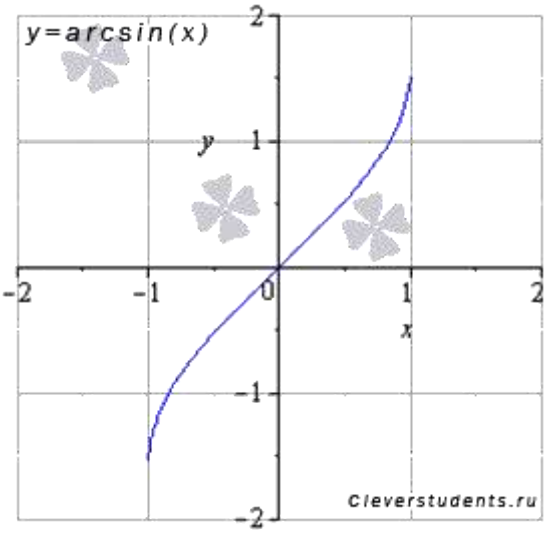
- Наклонных и горизонтальных асимптот нет.

Обратные тригонометрические функции, их свойства и графики.

Обратные тригонометрические функции (арксинус, арккосинус, арктангенс и арккотангенс) являются основным элементарным функциями. Часто из-за приставки "арк" обратные тригонометрические функции называют аркфункциями. Сейчас мы рассмотрим их графики и перечислим свойства.

Функция арксинус *y = arcsin(x)*.

Изобразим график функции арксинус:

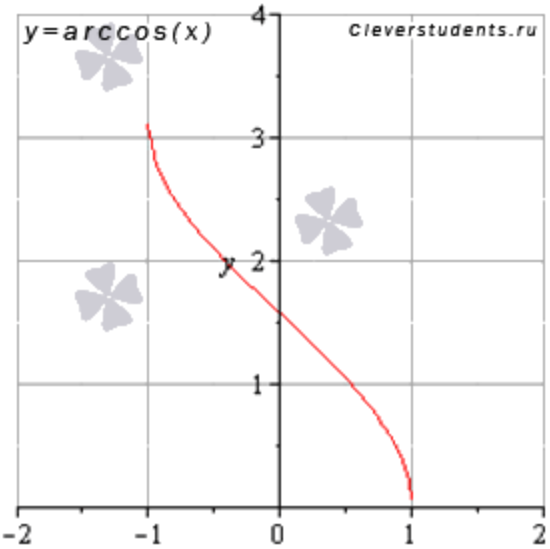


Свойства функции арксинус *y = arcsin(x)*.

- Областью определения функции арксинус является интервал от минус единицы до единицы включительно: $x \in [-1;1]$.
- Область значений функции *y = arcsin(x)*: $y \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.
- Функция арксинус - нечетная, так как $y(-x) = -y(x)$.
- Функция *y = arcsin(x)* возрастает на всей области определения, то есть, при $x \in [-1;1]$.
- Функция вогнутая при $x \in [0;1]$, выпуклая при $x \in [-1;0]$.
- Точка перегиба *(0; 0)*, она же ноль функции.
- Асимптот нет.

Функция арккосинус *y = arccos(x)*.

График функции арккосинус имеет вид:

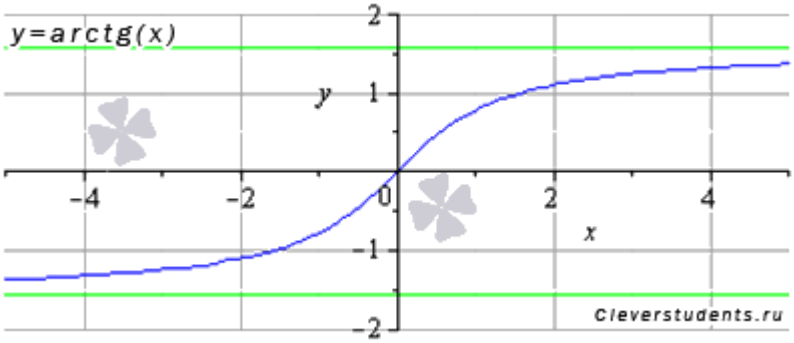


Свойства функции арккосинус *y = arccos(x)*.

- Область определения функции арккосинус: $x \in [-1;1]$.
- Область значений функции *y = arccos(x)*: $y \in [0;\pi]$.
- Функция не является ни четной ни нечетной, то есть, она общего вида.
- Функция арккосинус убывает на всей области определения, то есть, при $x \in [-1;1]$.
- Функция вогнутая при $x \in [-1;0]$, выпуклая при $x \in [0;1]$.
- Точка перегиба $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.
- Асимптот нет.

Функция арктангенс *y = arctg(x)*.

График функции арктангенс имеет вид:



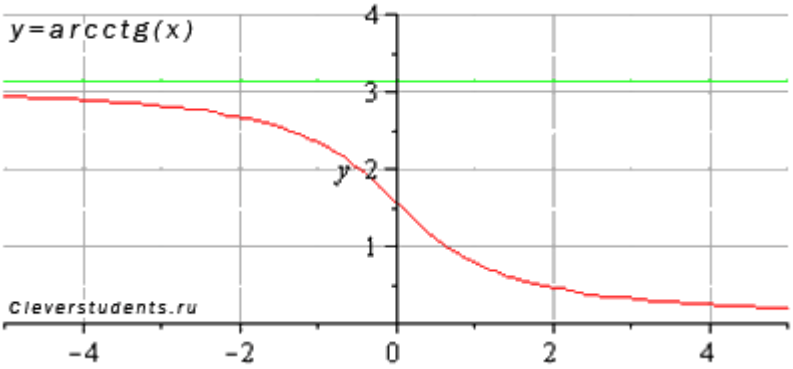
Свойства функции арктангенс *y = arctg(x)*.

- Область определения функции *y = arctg(x)*: $x \in (-\infty;+\infty)$.
- Область значений функции арктангенс: $y \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.
- Функция арктангенс - нечетная, так как $y(-x) = -y(x)$.
- Функция возрастает на всей области определения, то есть, при $x \in (-\infty;+\infty)$.
- Функция арктангенс вогнутая при $x \in (-\infty;0]$, выпуклая при $x \in [0;+\infty)$.
- Точка перегиба *(0; 0)*, она же ноль функции.

- Горизонтальными асимптотами являются прямые $y = -\frac{\pi}{2}$ при $x \to -\infty$ и $y = \frac{\pi}{2}$ при $x \to +\infty$. На чертеже они показаны зеленым цветом.

Функция арккотангенс *y = arcctg(x)*.

Изобразим график функции арккотангенс:



Свойства функции арккотангенс *y = arcctg(x)*.

- Областью определения функции арккотангенс является все множество действительных чисел: $x \in (-\infty; +\infty)$.
- Область значений функции *y = arcctg(x)*: $y \in (0; \pi)$.
- Функция арккотангенс не является ни четной ни нечетной, то есть, она общего вида.
- Функция убывает на всей области определения, то есть, при $x \in (-\infty; +\infty)$.
- Функция вогнутая при $x \in [0; +\infty)$, выпуклая при $x \in (-\infty; 0]$.
- Точка перегиба $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.
- Горизонтальными асимптотами являются прямые $y = \pi$ при $x \to -\infty$ (на чертеже показана зеленым цветом) и *y = 0* при $x \to +\infty$.