Задание:

- Изучить теорию;
- Написать краткий конспект
- Разобрать примеры решения;
- По вопросам обращаться 072-1098278 или hvastov@rambler.ru
- Фотоотчёт конспекта прислать в течение 3 дней со дня получения задания на hvastov@rambler.ru

Тема: Непрерывность функции в точке и на промежутке. Свойства непрерывных функций.

План

1. Непрерывность функции
2. Свойства непрерывных функций
3. Предел функции на бесконечности

Непрерывность функции

Напомним, что функция $f(x)$ называется непрерывной в точке a, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Доказанные свойства предела функции позволяют обосновать **свойства непрерывных функций**, приведенные на с. 6: если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке a, то сумма, **произведение и частное непрерывных в точке a функций непрерывны в точке a** (частное в случае, когда делитель $g(a) \neq 0$).

Действительно, если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке a, то

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) \text{ и } \lim_{x\to a} g(x) = g(a).$$

Тогда $\lim\limits_{x\to a} (f(x) + g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x) = f(a) + g(a)$, а это и означает, что функция $f(x) + g(x)$ непрерывна в точке a. Аналогично обосновывается непрерывность произведения и частного двух непрерывных функций

Согласно определению, непрерывность функции $f(x)$ в точке x_0 означает выполнение следующих условий:

1. функция $f(x)$ должна быть определена в точке x_0;
2. у функции $f(x)$ должен существовать предел в точке x_0;

3. предел функции в точке x_0 совпадает со значением функции в этой точке.

Например, функция $f(x) = x^2$ определена на всей числовой прямой и $\lim\limits_{x \to 1} x^2 = 1$. Поскольку $f(1) = 1$, то значение $f(x) = x^2$ в точке 1 совпадает с пределом этой функции при $x \to 1$, поэтому по определению функция $f(x) = x^2$ непрерывна в точке $x = 1$.

Используя определения левостороннего и правостороннего пределов, можно дать определения левосторонней и правосторонней непрерывности функции, а именно: функцию называют **непрерывной слева** в точке a, если $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = f(a)$, и **непрерывной справа** в точке a, если $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = f(a)$.

Например, функция $f(x) = \{x\}$, где $\{x\}$ — дробная часть числа x, непрерывна в любой точке, кроме целочисленных значений аргумента x, в которых она непрерывна справа (рис. 6.2).

Функцию называют *непрерывной на интервале* $(a;\ b)$, если она непрерывна в каждой его точке. Функцию называют *непрерывной на отрезке* $[a;\ b]$, если она непрерывна на интервале $(a;\ b)$, непрерывна справа в точке a и непрерывна слева в точке b.

Если равенство $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ в точке a не выполняется, функцию $f(x)$ называют **разрывной** в точке a (а сама точку — **точкой разрыва** функции $f(x)$). Например, функция из задачи 2 является разрывной в точке 2.

Если рассмотреть функцию $y = [x]$ ($[x]$ — целая часть x, то есть наибольшее целое число, которое не превышает x), то эта функция является разрывной в каждой целочисленной точке (рис. 6.3).

Аналогично для функции $y = [x]$ ($[x]$ — дробная часть x, то есть разность $x - [x]$) точками разрыва являются все целочисленные значения аргумента x (см. рис. 6.2).

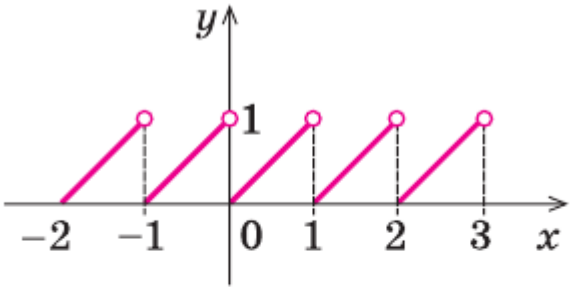


Рис. 6.2

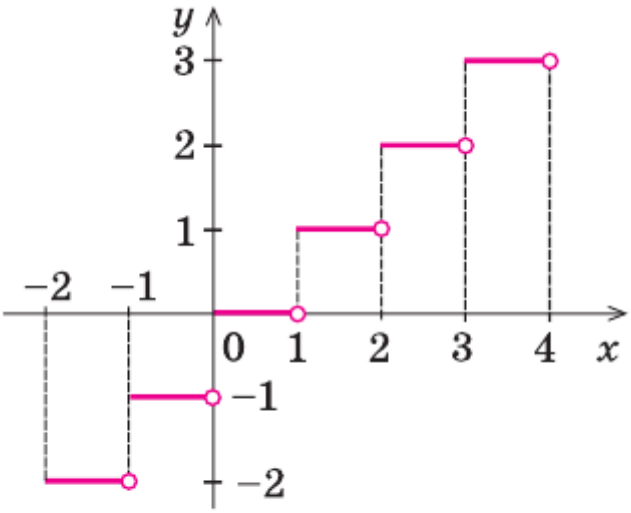


Рис. 6.3

Понятие непрерывности функции можно связать с понятиями приращения функции и аргумента.

Пусть задана функция $f(x)$ с областью определения $D(f) = (a;\ b)$ и пусть x_0 — некоторое значение аргумента из интервала $(a;\ b)$. Если $x \in (a;\ b)$ — другое фиксированное значение аргумента, то разность $x - x_0$ называют **приращением аргумента** и обозначают Δx, то есть $\Delta x = x - x_0$. Отсюда $x = x_0 + \Delta x$.

Разность $f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ называют **приращ ением функции** f точке x_0 и обозначают Δf.

Очевидно, что в случае, когда x стремится к x_0, приращение аргумента стремится к нулю: $\Delta x \to 0$.. Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, то по определению $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, и поэтому а это означает, что $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta f = 0$.

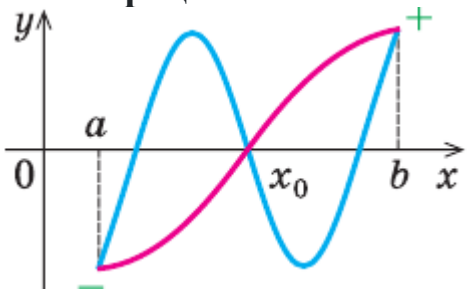
Из последнего соотношения получаем, что в случае, когда функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, малому приращению аргумента соответствует малое приращение функции. Учитывая это свойство, мы строим график непрерывной функции в виде сплошной линии.

Представление о непрерывной функции как о функции, график которой можно нарисовать, не отрывая карандаш от бумаги, хорошо подтверждается свойствами непрерывных функций, которые доказываются в курсах математического анализа. Приведем примеры таких свойств:

Свойства непрерывных функций

1. Если непрерывная на отрезке $[a;\ b]$ функция принимает на концах отрезка значения разных знаков, то в некоторой точке этого отрезка она принимает значение, равное нулю.

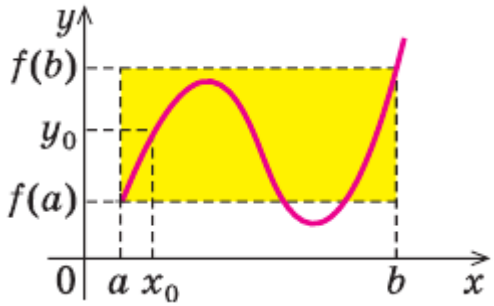
Иллюстрация:



Свойства непрерывных функций:

2. Функция $f(x)$, непрерывная на отрезке $[a;\ b]$ принимает все промежуточные значения между ее значениями $f(a)$ и $f(b)$ на концах отрезка.

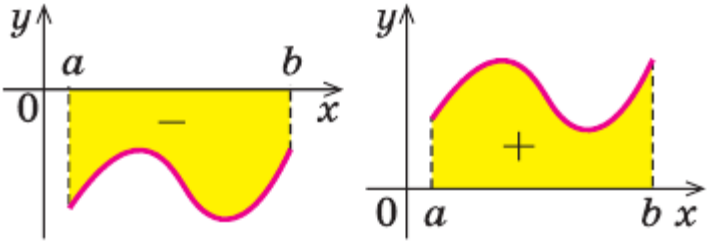
Иллюстрация:



Свойства непрерывных функций:

3. Если на интервале $(a;\ b)$ функция $f(x)$ непрерывна и не обращается в нуль, то на этом интервале функция сохраняет постоянный знак.

Иллюстрация :



Отметим, что известные вам элементарные функции непрерывны в любой точке своей области определения. Графики таких функций изображаются сплошными кривыми на любом интервале, который полностью входит в область определения (именно на этом свойстве и основывается способ построения графика функции «по точкам»). Например, функция $f(x)=\frac{1}{x}$ непрерывна на любом интервале, который не содержит точку 0 (см. рис. 5.19).

Свойства непрерывных функций позволяют корректно обосновать метод интервалов решения неравенств. Поэтому метод интервалов можно использовать при решении любых неравенств вида $f(x) \gtrless 0$, где $f(x)$ — непрерывная в любой точке своей области определения функция.

Предел функции на бесконечности

Часто при изучении функций возникает необходимость найти предел функции на бесконечности, то есть найти такое число B (если оно существует), к которому стремится функция $f(x)$ при неограниченном возрастании аргумента x или когда x, увеличиваясь по абсолютной величине, остается отрицательным.

Рассмотрим функцию $f(x)=2+\frac{1}{x^2+1}$. Очевидно, что при увеличении x знаменатель дроби увеличивается, поэтому значение дроби становится как угодно малым по абсолютной величине. Таким образом, значение функции $f(x)$ при очень больших значениях аргумента x мало отличается от числа 2. В этом случае говорят, что функция $f(x)$ имеет своим пределом число 2 при $x \to \infty$, и пишут: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=2.$

Определение:

Пусть функция $f(x)$ определена на всей числовой прямой. Число B называют пределом $f(x)$ при $x \to \infty$, если для любого

числа $\varepsilon > 0$ *найдется такое число** $M > 0$, *что для всех* x, *удовлетворяющих условию* $|x| > M$, *выполняется неравенство* $|f(x) - B| < \varepsilon$. Это записывается так: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = B$.

Поведение функции $f(x)$ может быть разное при $x \to -\infty$ и при $x \to +\infty$, поэтому при исследовании свойств функции иногда отдельно рассматривают $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Эти пределы определяются аналогично определению предела $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$, только условие $|x| > M$ заменяется соответственно на $x < -M$ и $x > M$.

*Заметим, что число M, вообще говоря, зависит от ε, и поэтому его часто обозначают $M(\varepsilon)$.

Кроме рассмотренных случаев конечных пределов функции $f(x)$ при $x \to a$ (или при $x \to \infty$), иногда используется также понятие бесконечного предела. Например, функция $f(x) = \frac{1}{x^2}$, которая определена для всех $x \neq 0$ (рис. 6.4), принимает сколь угодно большие значения при $x \to 0$. В этом случае говорят, что функция в точке $x = 0$ имеет бесконечный предел, и пишут: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$.

Определение:

Будем считать, что $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, если для любого числа $M > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $|x - a| < \delta$ $(x \neq a)$, выполняется неравенство $|f(x)| > M$.

Аналогично определяют обозначения $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ (только в первом случае условие $|f(x)| > M$ заменяют на $f(x) > M$, а во втором — на $f(x) < -M$).

В математике также используется понятие бесконечного предела при $x \to \infty$, то есть предела типа $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, который определяется так: *если для любого числа* $M > 0$ *существует такое число* $M_0 > 0$, *что для всех* x, *удовлетворяющих условию* $|x| > M_0$, *выполняется условие* $|f(x)| > M$, *то говорят,*

что функция $f(x)$ *имеет* ***бесконечный предел на бесконечности.*** Например, $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 = +\infty.$ Это равенство выражает известное свойство функции $f(x) = x^2,$ которая неограниченно возрастает при увеличении значений $|x|.$

Пример №20

Найдите предел $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^3 - 3x + 1}{5 + x^2 - x^3}.$

<u>Решение:</u>

Вынесем в числителе и знаменателе наивысшую степень переменной за скобки и сократим числитель и знаменатель на $x^3.$ Тогда

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^3 - 3x + 1}{5 + x^2 - x^3} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3\left(2 - \dfrac{3}{x^2} + \dfrac{1}{x^3}\right)}{x^3\left(\dfrac{5}{x^3} + \dfrac{1}{x} - 1\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{2 - \dfrac{3}{x^2} + \dfrac{1}{x^3}}{\dfrac{5}{x^3} + \dfrac{1}{x} - 1} = \frac{2}{-1} = -2.$$

<u>Ответ</u>: -2

Пример №21

Найдите предел $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+5} - x\right).$

<u>Решение:</u>

Умножим и разделим разность, которая стоит под знаком предела, на сумму $\sqrt{x^2+5} + x.$ Получим

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+5} - x\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+5} - x\right)\left(\sqrt{x^2+5} + x\right)}{\sqrt{x^2+5} + x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 + 5 - x^2}{\sqrt{x^2+5} + x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{5}{\sqrt{x^2+5} + x} = 0.$$

Ответ: 0

Напомним, что в случае, когда $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0,$ функция называется бесконечно малой при $x \to a.$ Если же $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty,$ то функция называется бесконечно большой при $x \to a.$ Аналогично определяют б***есконечно малые и бесконечно большие функции*** при $x \to \infty,\ x \to -\infty,\ x \to +\infty.$

Отметим, что в случае, когда функция $f(x)$ является бесконечно малой при $x \to a$ и $f(x) \neq 0$ для $x \neq a$ из некоторой окрестности точки $a,$ функция $\dfrac{1}{f(x)}$ будет бесконечно большой при $x \to a.$ И

наоборот, если функция $f(x)$ — бесконечно большая при $x \to a$, то функция $\frac{1}{f(x)}$ — бесконечно малая при $x \to a$ (это свойство было использовано на последнем этапе вычисления предела в задаче 2).

Например, функция $f(x) = x$ — бесконечно малая при $x \to 0$ и бесконечно большая при $x \to \infty$ (а также при $x \to -\infty$ и при $x \to +\infty$). Тогда функция $f(x) = \frac{1}{x}$ является бесконечно малой при $x \to \infty$ (при $x \to -\infty$ и при $x \to +\infty$) и бесконечно большой при $x \to 0$ (аналогично при $x \to -0$ и при $x \to +0$).