Практическая работа

Задание:

- Повторить теорию;
- Выполнить практическую работу;
- Оформить отчёт (должен содержать тему, цель, выполненное задание, в верхнем колонтитуле группа и фамилия студента);
- По вопросам обращаться 072-1098278 или hvastov@rambler.ru
- Фотоотчёт работы прислать в течении 3 дней со дня получения задания на hvastov@rambler.ru
- Выполненную работу предоставить по окончании дистанционного обучения или при прохождении практики.

Тема: Нахождение пределов функций**.**

Цель: Научить вычислять пределы, раскрывать неопределённости, используя свойства, теоремы и 2 замечательных предела

Задачи: 1. Проверить понимание темы «Теория пределов»

2. Проверить умение использовать свойства и теоремы о пределах и вычислять пределы и применяя теорию пределов для решения физических задач

Теоретические сведения

Основные теоремы о пределах

$\lim(x+y)=\lim x+\lim y;$ (1)

$\lim(x-y)=\lim x-\lim y;$ (1*), то из условий(1) и (1*) $\Rightarrow$ $\lim(x\pm y)=\lim x\pm\lim y;$

$\lim(xy)=\lim x\lim y;$ (2) $\lim(x^m)=(\lim x)^m$ (3) $\lim\sqrt[m]{x}=\sqrt[m]{\lim x},$ (4)

$\lim\frac{x}{y}=\frac{\lim x}{\lim y}$, если $\lim y\neq 0$ (5) $\lim(\log_a x)=\log_a(\lim x)$ (6)

Запомните, что

$\lim\frac{\sin x}{x}=1$, при $x\to 0$ (Первый замечательный предел)

$\lim(1+\frac{1}{n})^n=e$, при $n\to\infty$ - число e; $e\approx 2{,}71828$ — основание натуральных логарифмов; (логарифм числа ***x*** по основанию ***e*** называется натуральным

логарифмом и обозначается ***ln x.***

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e; \quad \lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e$$ (второй замечательный предел)

При x→ ∞; или при α→ 0.

2. Рассмотрите решение следующих примеров:

Пример 1. Найти lim ($x^4 - 3x^2 + 16x + 1$), при x→ -1

Решение. lim ($x^4 - 3x^2 + 16x + 1$) = (lim x^4 – lim $3x^2 + 16x + 1$) = [(lim x)^4 - 3(lim x)^2 +16lim x +1] =

=$(-1)^4 - 3(-1)^2 + 16(-1) + 1 = -17$ *Ответ.* - 17.

Примечание. Для нахождения предела целого или дробного рационального алгебраического выражения, если предел знаменателя не равен нулю, надо переменную x заменить ее пределом и произвести указанные в выражении действия. Например,

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x^2-x-5}{x^3+x+1} = \frac{2*2^2-2-5}{2^3+2+1} = \frac{1}{11}$$

Пример 2. Найти $\lim_{x\to 0}\frac{2x^3+2x^2}{5x^3-3x^2}$

Решение. Применить теорему о пределе дроби (частного) нельзя, т.к. при x→0

lim ($5x^3 - 3x^2$)=0

До перехода к пределу следует упростить данную дробь:

$$\frac{2x^3+2x^2}{5x^3-3x^2} = \frac{2x^2(x+1)}{x^2(5x-3)} = \frac{2(x+1)}{5x-3}$$

Предел знаменателя

$$\lim_{x\to 0}(5x-3) = \lim_{x\to 0}(5x) - 3 = 0 - 3 = -3 \qquad -3 \neq 0$$

Применяя теперь теорему о пределе дроби (частного), получим:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x^3+2x^2}{5x^3-3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2x^2(x+1)}{x^2(5x-3)} = \lim_{x\to 0}\frac{2(x+1)}{5x-3} = \frac{\lim\limits_{x\to 0}2(x+1)}{\lim\limits_{x\to 0}5x-3} = \frac{2\lim\limits_{x\to 0}(x+1)}{5\lim\limits_{x\to 0}(x-3)} = -\frac{2}{3}$$

Ответ. -2/3

Пример 3: Найти $\lim_{x\to\infty}\frac{5}{3x+1}$

Решение. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5}{3x+1}=\frac{5}{\lim\limits_{x\to\infty}3x+1}=\frac{5}{3\lim\limits_{x\to\infty}x+1}=\frac{5}{\infty}=0$ *Ответ.* 0.

Пример 4. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+1}{2x^3+1}$

Решение. Числитель и знаменатель дроби превращаются в бесконечность, а их отношение не имеет смысла. Поэтому преобразуем дробь, разделив числитель и знаменатель дроби на наивысшую степень аргумента, т.е. на x^3.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+1}{2x^3+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x^3}}{2+\frac{1}{x^3}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x^3})}{\lim\limits_{x\to\infty}(2+\frac{1}{x^3})}=\frac{1}{2}$$ *Ответ.* 1/2.

Пример 5. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{x}$

Решение. Применить теорему о пределе дроби нельзя, т.к. предел знаменателя равен нулю.

Перепишем данное выражение так:

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{4\sin 4x}{4x}=4\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{4x}$, Применяя формулу $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$, получим: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{x}=4\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{4x}=4*1=4$ *Ответ.* 4.

Пример 6. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{5}}{x^2-x-20}$

Решение. применить теорему о пределе частного нельзя, т.. при x=5 числитель и знаменатель обращаются в нуль. Перепишем данную дробь в виде

$$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{5}}{x^2-x-20}=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{5}}{(x+4)(x-5)}-\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{5})(\sqrt{x}+\sqrt{5})}{(x+4)(x-5)(\sqrt{x}+\sqrt{5})}=\frac{x-5}{(x+4)(x-5)(\sqrt{x}+\sqrt{5})},$$

Переходя к пределу, получим:

$$\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{5}}{x^2-x-20}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 5}\frac{1}{(x+4)(\sqrt{x}+\sqrt{5})}=\frac{1}{18\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{90}$$

Либо: $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{5}}{x^2-x-20}=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{5}}{(x+4)(x-5)}=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{5}}{(x+4)(\sqrt{x}-\sqrt{5})(\sqrt{x}+\sqrt{5})}=\frac{1}{(x+4)(\sqrt{x}+\sqrt{5})}.$

Ответ. $\frac{\sqrt{5}}{90}$

3. *Вычисление пределов и раскрытие неопределенностей вида* $\left[\frac{0}{0}\right], \left[\frac{\infty}{\infty}\right], [1^{\infty}]$.

$$1.\ \lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2-4}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{x+2}=\frac{1}{4}$$

$$2.\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{tg\,5x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x\cos 5x}{\sin 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)3x5x\cos(5x)}{3x\sin(5x)5x}=\lim_{x\to 0}\frac{3x\cos 5x}{5x}=\frac{3}{5}$$

$$3.\ \lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-1}{5x^2+2x}\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{1}{x^2}}{5+\frac{2}{x}}=\frac{3}{5}$$

$$4.\ \lim_{x\to\infty}\frac{x^3+5x}{x+10}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{5}{x^2}}{\frac{1}{x^2}+\frac{10}{x^3}}=\frac{1}{0}=\infty$$

$$5.\ \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+6}{x^4+10}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^2}+\frac{6}{x^4}}{1+\frac{10}{x^4}}=\frac{0}{1}=0$$

$$6.\ \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x+5}\right)^{2x+1}=(1^{\infty})=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x+5}\right)^{x+5}\right]^{\frac{2x+1}{x+5}}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{2x+1}{x+5}}=e^2$$

Самостоятельно решить задачи и вычислить пределы:

1. При параллельном соединении двух проводников, имеющих сопротивления r и r’ , общее сопротивление R, соответствующей части электрической цепи, вычисляется по формуле
   $\frac{1}{R}=\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}$. Считая r известным, найти $\lim\limits_{r'\to\infty}R$; $\lim\limits_{r'\to 0}R$.

Истолкуйте полученные результаты с точки зрения физики.

2. Формула выпуклой линзы имеет вид:

$\frac{1}{F}=\frac{1}{d}+\frac{1}{f}$, d , f – Расстояния соответственно предмета и его изображения. – фокусное расстояние линзы (const); найти $\lim\limits_{d\to\infty}f$; $\lim\limits_{d\to F}f$.(1) $d<F$;2) $d>F$); полученные результаты объяснить с точки зрения физики.

4. Вычислить следующие пределы:

1. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x-5}{x^2-25}=\left[\dfrac{0}{0}\right]$

2. $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{x-7}{\left(x^2-49\right)}$

3. $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{1}{x+5}$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{tg\,5x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{\sin 5x}$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 8x}{x}$

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-1}{5x^2+2x}\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$

8. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3+3x^2-8}{5x^3-7x+3}$

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+5x}{x+10}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$

10. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+15}{x^4+7}$

11. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+6}{x^4+10}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$

12. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5-5x^4+9}{4x^5+2x^3-7}$

13. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n+5}\right)^{2n}=(1^{\infty})$

14. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{4}{n}\right)^{n}\right]^{2}$

15. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x+5}\right)^{x}$

16. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+9}{x}\right)^{x}$

Домашнее задание. ***Решить (на выбор) любые 2задачи с последующим объяснением на занятиях***

1. Масса движущегося тела определяется соотношением $m(\beta)=\dfrac{m_o}{\sqrt{1-\beta^2}}$ $и$ $\beta=\dfrac{v}{c}$ - отношение скорости тела к скорости света. Покажите, что в предельном переходе при $\beta\to 0$ массу можно считать постоянной и равной m_o.

2. Интервал времени между двумя событиями зависит от скорости движения системы, где эти события происходят, следующим образом:

$\Delta t(v)=\dfrac{\Delta t_o}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$; $При$ $v\to c$ найдите предел функции $\Delta t(v)$ и сделайте вывод, считая, например, что Δt_o - продолжение жизни близнеца, оставшегося на Земле, а Δt - продолжительность жизни его брата, отправившегося в космическое путешествие.

3.Значение кинетической энергии тела выражается формулой

$E_{kuh}(\beta)=\dfrac{m_o v^2}{1+\sqrt{1-\beta^2}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$, $\beta=\dfrac{v}{c}$. Найдите предел этой функции,

т.е. получите классическую формулу для кинетической энергии, если $\beta\to 0$.

4.Сила давления летчика, совершающего «мертвую петлю», на сиденье в момент достижения верхней точки «мертвой петли» выражается формулой $\varphi = m(a - g)$, где $a = v^2/r$ - центростремительное (нормальное) ускорение , r- радиус петли. Рассматривая данные выражения как функцию центростремительного ускорения, докажите, что при предельном переходе $a \to g$ летчик испытывает состояние невесомости.

5.Сила давления летчика на сиденье в нижней точке «мертвой петли» определяется формулой $Q=m(g + v^2/r)$, m- масса летчика, $g = 9{,}8$ м/с^2.

Рассматривая данное выражение как функцию от ***r*** , найдите ее предел при: a**)** **$r \to \infty$;** b**)** **$r \to 0$.** Сделайте соответствующие выводы.

6.В падающем с ускорением ***a*** лифте тело давит на пол кабины с силой $P= m(a - g)$, g - ускорение свободного падения. Рассматривая данный процесс как функцию от a, найдите ее предел при a) **$a \to g$**; b**)** **$a \to 0$**.