Уважаемые студенты!

Вам необходимо изучить и законспектировать материал лекции, ответить на контрольные вопросы.

Ответ прислать на на электронную почту hvastov@rambler.ru
При возникновении вопросов обращаться по телефону 0721098278 (WatsApp).

Лекция

Векторное уравнение прямой и плоскости.

План.

1. Общее уравнение плоскости.
2. Построение плоскости по уравнению
3. Угол между плоскостями. Условия параллельности и перпендикулярности двух плоскостей.
4. Точка пересечения трех плоскостей.
5. Расстояние от точки до плоскости.
6. Прямая в пространстве. Общее уравнение прямой.
7. Векторное уравнение прямой. Параметрические уравнения прямой.

Общее уравнение плоскости.

Рассмотрим уравнение $Ax+By+Cz+D=0$ (2).

1) пусть C□0. Тогда $A(x-0)+B(y-0)+C(z+D/C)=0$ – это уравнение плоскости, имеющейнормальный вектор $\mathbf{N}=A\mathbf{i}+B\mathbf{j}+C\mathbf{k}$ и проходящей через точку $M_1(0, 0, -D/C)$

2) пусть $A=0$; тогда $By+Cz+D=0$; $\mathbf{N}=B\mathbf{j}+C\mathbf{k}$. $\mathbf{N}$- компланарен ортам $\mathbf{k}$ и $\mathbf{j}$, то естьпараллелен плоскости yOz, поэтому соответствующая плоскость параллельна оси Ox.

3) если $B=0$, то плоскость параллельна оси Oy.

4) если $C=0$, то плоскость параллельна оси Oz.

5) пусть$D=0$. Плоскость проходит через точку $(0, 0, 0)$, так как координаты этой точки

$x=y=z=0$ удовлетворяют уравнению этой плоскости.

6) пусть $A=B=0$. Плоскость параллельна Ox и Oy, то есть параллельна xOy

(□ оси *Oz*),уравнение приводится к виду $z=c$.

7) $A=C=0$, плоскость □ оси *Oy;* уравнение приводится к виду $y=b$.

8) $B=C=0$, плоскость □ оси *Ox*; уравнение приводится к виду $x=a$.

9) $A=D=0$, плоскость проходит через ось *Ox*, так как она параллельна *Ox* $(A=0)$ ипроходит через начало координат $(D=0)$.

10) $B=D=0$, плоскость проходит через ось *Oy*.

11) $C=D=0$, плоскость проходит через ось *Oz*.

12) $A=B=D=0$, плоскость совпадает с плоскостью *xOy*, ее уравнение $z=0$.

13) $A=C=D=0$, плоскость совпадает с *xOz*, $y=0$.

14) $B=C=D=0$, плоскость совпадает с *yOz*, $x=0$.

15) $A=B=C=0$, исключено, так как уравнение $D=0$ не имеет геометрического смысла,потому что не содержит текущих координат.

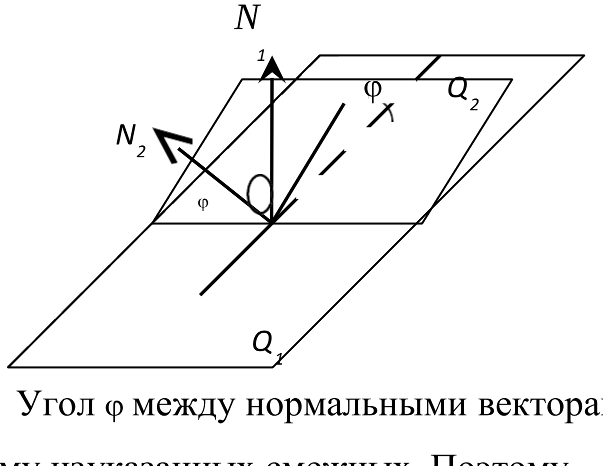
Построение плоскости по уравнению.

Достаточно найти три какие-либо ее точки, не лежащие на одной прямой. Проще всего определять точки пересечения с осями координат. Две координаты задаем произвольно, третью – находим из уравнения.

Угол между плоскостями. Условия параллельности и перпендикулярности двух плоскостей.

Рассмотрим две плоскости Q_1 и Q_2:$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ (Q_1) $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ (Q_2)

Угол между плоскостями – это один из смежных двугранных углов, образованных этими плоскостями.



Угол φ между нормальными векторами этих плоскостей, очевидно, равен одному изуказанных смежных. Поэтому

$$\cos \varphi=(N_1 \cdot N_2)/(|N_1| \cdot |N_2|)=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$

Плоскости Q_1 и Q_2:

1) параллельны друг другу тогда, когда их нормальные векторы $\boldsymbol{N_1}$ и $\boldsymbol{N_2}$ коллинеарны.

2) перпендикулярны, если $\boldsymbol{N_1}$□$\boldsymbol{N_2}$.

Точка пересечения трех плоскостей.

$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ $A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0$

Чтобы найти точку пересечения, нужно найти решение системы:

$A_1x+B_1y+C_1z=-D_1 A_2x+B_2y+C_2z=-D_2 A_3x+B_3y+C_3z=-D_3$.

Если $\Delta\neq 0$, то система имеет единственное решение, то есть три плоскости пересекаются.

Расстояние от точки до плоскости.

Пусть дана точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и плоскость Q: $Ax+By+Cz+D=0$. Расстояние d между ними,то есть длина перпендикуляра, опущенного из точки M_0 на плоскость Q: $d= \frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{}}$

определяется аналогично расстоянию от точки до прямой.

Прямая в пространстве. Общее уравнение прямой.

Рассмотрим систему линейных уравнений:

$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ (3)

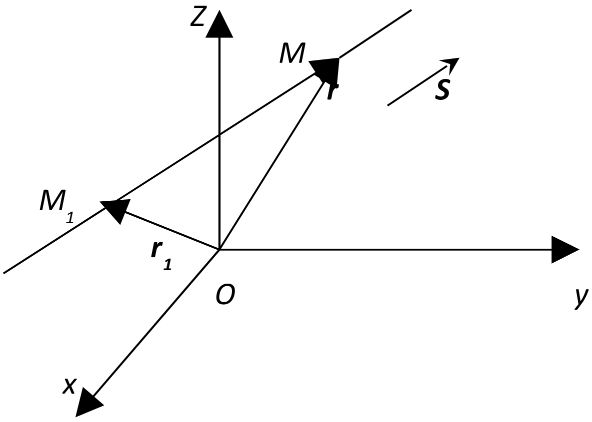
Уравнения системы - это уравнения двух плоскостей. Если они не параллельны, то есть их нормальные векторы не коллинеарны, то система (3) определяет прямую как линию пересечения двух плоскостей, то есть как множество точек пространства, координаты которых удовлетворяют каждому из уравнений системы. Это - общее уравнение прямой.

Векторное уравнение прямой. Параметрические уравнения прямой.

Положение прямой в пространстве определяется заданием какой-либо ее точки M_1 и направляющего вектора $\boldsymbol{S}$ прямой, его проекции на координатные оси – направляющие коэффициенты прямой.

Пусть прямая задана т. $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и вектором $\boldsymbol{S}=m\boldsymbol{i}+n\boldsymbol{j}+p\boldsymbol{k}$.

Рассмотрим произвольную точку $M(x, y, z)$ на прямой.



Из рисунка: $\mathbf{OM}=\mathbf{OM_1}+\mathbf{M_1M}$, $\mathbf{M_1M}\parallel\mathbf{S}$; $\mathbf{M_1M}=t\cdot\mathbf{S}$, где t – скалярный множитель, параметр,т.е. $\mathbf{r}=\mathbf{r_1}+t\mathbf{S}$. (4)

Это векторное уравнение прямой. Теперь, зная, что $\mathbf{r}=\mathbf{OM}=(x-0)\mathbf{i}+(y-0)\mathbf{j}+(z-0)\mathbf{k}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$; $\mathbf{r_1}=\mathbf{OM_1}=x_1\mathbf{i}+y_1\mathbf{j}+z_1\mathbf{k}$; $\mathbf{M_1M}=t\mathbf{S}=tm\mathbf{i}+tn\mathbf{j}+tp\mathbf{k}$, запишем

$$\begin{cases} x=x_1+tm \\ y=y_1+tn \\ z=z_1+tp \end{cases}$$ - это параметрические уравнения прямой.

При изменении t изменяются координаты x, y, z и т. M перемещается по прямой.

Контрольные вопросы:

1. Общее уравнение плоскости, его исследования.
2. Как построить плоскость по уравнению?
3. Как найти угол между плоскостями?
4. Как найти точку пересечения трех плоскостей?
5. Как найти расстояние от точки до плоскости?
6. Прямая в пространстве. Общее уравнение прямой.
7. Векторное уравнение прямой. Параметрические уравнения прямой.