Уважаемые студенты!

Задание:

- Изучить теорию;
- Написать краткий конспект;
- Разобрать примеры решения;
- Ответить на вопросы;
- По вопросам обращаться 072-1098278 или hvastov@rambler.ru
- Фотоотчёт конспекта прислать в течении 3 дней со дня получения задания на hvastov@rambler.ru

Лекция

Тема: Производная сложной функции. Производные высших порядков.

План

1. Роль и место математики в современном мире при освоении профессиональных дисциплин и в сфере профессиональной деятельности.

2.Производная сложной функции

3.Производные высших порядков

3. Примеры решения типовых задач

У каждого человека есть определенный кругозор. Когда этот кругозор сужается до бесконечности малого, то он обращается в точку. Тогда человек и говорит, что это есть его точка зрения.

Д.Гильберт

1.Математика представляет собой одну из самых важных фундаментальных наук . Одной из характерных черт современного научно - технического прогресса является существенное расширение областей применения теоретической и вычислительной математики на базе широкого

использования метода математического моделирования . Математические методы применяются не только в таких традиционных науках , как механика, астрономия, физика, но и в экономике , химии, социологии, медицине.

Большинство направлений научной и технической деятельности людей достигли высокого уровня развития и исчерпали возможности описательных методов исследования.

В связи с этим дальнейший успех возможен только на базе использования математического аппарата. Работникам народного хозяйства необходимо владеть основными математическими методами исследования и приёмами вычислений, устным, письменным и машинным счётом.

Цель изучения математики в средних специальных учебных заведениях состоит в том, чтобы углубить знания по изученным разделам и ознакомиться с новыми разделами математики, которые обогащают общую культуры, развивают логическое мышление и широко используются в математическом моделировании задач, с которыми встречается современный специалист в своей деятельности.

2.Рассмотрим функцию $F(x)=\log_2(x^2+1)$. Эту функцию можно рассматривать как сложную функцию $F(y)=\log_2 y$, где $y=g(x)=x^2+1$, т.е как функцию f(y), аргумент которой также является функцией y=g(x). Иными словами, сложная функция – это функция от функции F(x)=f(g (x)).Производная сложной функции находится по формуле F’(x)=f’(y)*g’(x) , где y=g(x) , т.е. по формуле (f(g(x)))’ = f’(g(x))*g’(x).

Примеры:

1.Пусть $F(x)= (2x+1)^2 +5*(2x+1)$. Здесь $F(y)= y^2 +5y$, y=g(x)= 2x+1

F’(x) = (2y+5)*(2x+1)’= (2y+5)*2=(2*(2x+1)+5)*2=8x+14.

2.$F(x) = (x^2+1)\frac{3}{2}$. Здесь $f(y)= y\frac{3}{2}$, $y=g(x)= x^2+1$.

$F'(x) = \frac{3}{2}\ y\frac{1}{2} * (x^2+1)' = \frac{3}{2}\ (x^2+1)\ \frac{1}{2} * 2x = 3x * \sqrt{x^2+1}$

3. Пусть функция y = f(x) дифференцируемая во всей области её определения. Y'=f‘(x) является производной. Производная от f'(x) называется второй производной или производной второго порядка и обозначается y"; f "(x) ; $\frac{d^2y}{dx^2}$

Производная от второй производной называется производной третьего порядка и обозначается y'''= (y")' .

Производной n – го порядка называется производная от производной (n-1) порядка: $y^{(n)} = (y^{(n-1)})^1$.

3. Примеры решения типовых задач

Пример 1

Найти производную функции $y = \sin(3x-5)$

Под синусом у нас находится не просто x, а целое выражение $3x-5$, поэтому найти производную сразу по таблице не получится. Также мы замечаем, что здесь невозможно применить первые четыре правила, вроде бы есть разность, но дело в том, что «разрывать на части» синус нельзя: Функция $y = \sin(3x-5)$ – это сложная функция, причем многочлен $3x-5$ является вложенной функцией , а $\sin(3x-5)$ – внешней функцией.

Первый шаг, который нужно выполнить при нахождении производной сложной функции состоит в том, чтобы **разобраться, какая функция является вложенной, а какая – внешней.**

После того, как определены вложенная и внешняя функции применяют правило дифференцирования сложной функции $(u(v))' = u'(v) \cdot v'$.

Вычислим производную:

$y' = (\sin(3x-5))'$

Сначала находят производную внешней функции $u'(v)$, по формуле $(\sin x)' = \cos x$. **Все табличные формулы применимы и в том, случае, если x заменить сложным выражением**, в данном случае: $u'(v) = \cos(3x-5)$

При выполнении вычислений вложенная функция $v = 3x - 5$ не изменилась.

По формуле $(u(v))' = u'(v) \cdot v'$ получаем:

$$y' = (\sin(3x-5))' = \cos(3x-5) \cdot (3x-5)' = \cos(3x-5) \cdot (3-0)$$

Постоянный множитель обычно выносят в начало выражения:

$$y' = (\sin(3x-5))' = \cos(3x-5) \cdot (3x-5)' = \cos(3x-5) \cdot (3-0) =$$
$$= 3\cos(3x-5)$$

<u>Пример 2</u>

Найти производную функции $y = (2x+1)^5$

Запишем

$$y' = ((2x+1)^5)'$$

Определим где внешняя функция, а где вложенная. Для этого пробуем вычислить значение выражения $(2x+1)^5$ при $x = 1$. Что нужно выполнить в первую очередь? В первую очередь нужно сосчитать чему равно основание: $2 \cdot 1 + 1 = 3$, значит, многочлен $(2x+1)$ – и есть вложенная функция. И, только потом выполняется возведение в степень 3^5, следовательно, степенная функция – это внешняя функция.

По правилу дифференцирования сложной функции $(u(v))' = u'(v) \cdot v'$, сначала нужно найти производную от внешней функции, в данном случае, от степени. По формуле $(x^n)' = nx^{n-1}$ вычисляем производную:

$$y' = ((2x+1)^5)' = 5 \cdot (2x+1)^4 \cdot (2x+1)' =$$
$$= 5 \cdot (2x+1)^4 \cdot (2+0) = 10 \cdot (2x+1)^4$$

<u>Пример 3</u>

Найти производную функции $y = \sqrt[3]{x^2 + tgx + 15}$

Для того чтобы продифференцировать корень, его нужно представить в виде степени $x^{\frac{a}{b}}$. Таким образом, сначала приводим функцию в надлежащий для дифференцирования вид:

$$y' = (\sqrt[3]{x^2 + tgx + 15})' = \left(\left(x^2 + tgx + 15\right)^{\frac{1}{3}}\right)'$$

Анализируя функцию, приходим к выводу, что сумма трех слагаемых – это вложенная функция, а возведение в степень – внешняя функция.По правилу дифференцирования сложной функции $(u(v))' = u'(v) \cdot v'$:

$$y' = (\sqrt[3]{x^2 + tgx + 15})' = \left(\left(x^2 + tgx + 15\right)^{\frac{1}{3}}\right)' =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \left(x^2 + tgx + 15\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot (x^2 + tgx + 15)'$$

Степень снова представляем в виде радикала , а для производной вложенной функции применяем простое правило дифференцирования суммы:

$$y' = (\sqrt[3]{x^2 + tgx + 15})' = \left(\left(x^2 + tgx + 15\right)^{\frac{1}{3}}\right)' =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \left(x^2 + tgx + 15\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot (x^2 + tgx + 15)' =$$

$$= \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{(x^2 + tgx + 15)^2}} \cdot ((x^2)' + (tgx)' + (15)') =$$

$$= \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{(x^2 + tgx + 15)^2}} \cdot \left(2x + \frac{1}{\cos^2 x}\right)$$

<u>Пример 4</u>

Найти производную функции $y = 7^{\arcsin^2 x}$

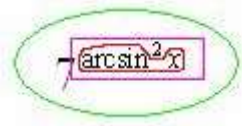
Разбираемся во вложениях этой функции. Пробуем вычислить выражение $7^{\arcsin^2 x}$ подставив значение $x = 1$. Если использовать для вычислений калькулятор, то сначала нужно найти $\arcsin 1$, значит, арксинус – самое глубокое вложение.

$$7^{\boxed{\arcsin^2 x}}$$

Затем этот арксинус единицы следует возвести в квадрат $\arcsin^2 1$:

$$7^{\boxed{\arcsin^2 x}}$$

И, наконец, семерку возводим в степень $7^{\arcsin^2 1}$:



То есть, в данном примере у нас три разные функции и два вложения, при этом, самой вложенной функцией является арксинус, а самой внешней функцией – показательная функция.

По правилу $(u(v))' = u'(v) \cdot v'$ сначала нужно взять производную от внешней функции. Вычислим производную показательной функции: $(a^x)' = a^x \ln a$.Вместо x рассмотрим сложное выражение $\arcsin^2 x$, что не отменяет справедливость данной формулы. Итак, результат применения правила дифференцирования сложной функции $(u(v))' = u'(v) \cdot v'$ следующий:

$$y' = (7^{\arcsin^2 x})' = 7^{\arcsin^2 x} \cdot \ln 7 \cdot (\arcsin^2 x)'$$

Теперь опять необходимо вычислить производную сложной функции взяв за вложенную функцию – арксинус, а за внешнюю функцию – степень. Согласно правилу дифференцирования сложной функции сначала нужно взять производную от степени:

$$y' = (7^{\arcsin^2 x})' = 7^{\arcsin^2 x} \cdot \ln 7 \cdot (\arcsin^2 x)' =$$
$$= 7^{\arcsin^2 x} \cdot \ln 7 \cdot 2\arcsin^1 x \cdot (\arcsin x)'$$

Далее находим по таблице производную арксинуса:

$$y' = (7^{\arcsin^2 x})' = 7^{\arcsin^2 x} \cdot \ln 7 \cdot (\arcsin^2 x)' =$$
$$= 7^{\arcsin^2 x} \cdot \ln 7 \cdot 2\arcsin^1 x \cdot (\arcsin x)' =$$
$$= 7^{\arcsin^2 x} \cdot \ln 7 \cdot 2\arcsin x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} =$$
$$= \frac{2\ln 7 \cdot 7^{\arcsin^2 x} \cdot \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$$

<u>Пример 5</u>

Найти производную функции $y = -2xe^{3x} + (x^2 - 4x + 3)\sin 7x$

$$y' = (-2xe^{3x} + (x^2 - 4x + 3)\sin 7x)'$$

Сначала используем правило дифференцирования суммы $(u \pm v)' = u' \pm v'$, заодно в первом слагаемом выносим постоянный множитель за знак производной по правилу $(Cu)' = Cu'$:

$$y' = (-2xe^{3x} + (x^2 - 4x + 3)\sin 7x)' = -2(xe^{3x})' + ((x^2 - 4x + 3)\sin 7x)'$$

Далее дважды необходимо применить правило $(uv)' = u'v + uv'$:

$$y' = (-2xe^{3x} + (x^2 - 4x + 3)\sin 7x)' = -2(xe^{3x})' + ((x^2 - 4x + 3)\sin 7x)' =$$
$$= -2((x)'e^{3x} + x(e^{3x})') + (x^2 - 4x + 3)'\sin 7x + (x^2 - 4x + 3)(\sin 7x)'$$

Согласно правилу $(u(v))' = u'(v) \cdot v'$, получаем:

$$y' = (-2xe^{3x} + (x^2 - 4x + 3)\sin 7x)' = -2(xe^{3x})' + ((x^2 - 4x + 3)\sin 7x)' =$$
$$= -2((x)'e^{3x} + x(e^{3x})') + (x^2 - 4x + 3)'\sin 7x + (x^2 - 4x + 3)(\sin 7x)' =$$
$$= -2(1 \cdot e^{3x} + x \cdot e^{3x} \cdot (3x)') + (2x - 4 + 0)\sin 7x + (x^2 - 4x + 3)\cos 7x \cdot (7x)' =$$
$$= -2(e^{3x} + 3xe^{3x}) + (2x - 4)\sin 7x + 7(x^2 - 4x + 3)\cos 7x$$

Задания к лекции для самостоятельного решения:

Найти производную функции:

1) $y = \left(5x^2 - 3\sqrt[5]{x^2} - 2\right)^3$; 2) $y = \sin \ln 7x$; 3) $y = 5^{6x} \arcsin 5x$.

Механический смысл второй производной: ускорение a(t) прямолинейного движения материальной точки в момент времени t равно первой производной от скорости по времени или второй производной от пути по времени.

$a(t) = U'(t) = S''(t)$.

Пример: Тело движется прямолинейно по закону $S= 1 - 2t + t^3$. Найти скорость и ускорение в момент времени t=3.

Решение:

$U(t)=S'(t) = (1-2t+t^3)' = - 2 + 3t^2$

$A(t)= U'(t) = (- 2 + 3t^2) = 6t$; $a(3) = 6 *3 = 18$

$U(3) = - 2+3 *3^3 = 25$.

Контрольные вопросы :

1. Что такое производная ?
2. Как найти производную сложной функции?
3. В чём заключается механический смысл второй производной?
4. Дать определение производной n-го порядка