Уважаемые студенты!

Вашему вниманию представлена лекция

на тему «Теорема сложения вероятностей**»**

Задание

1. Записать и выучить правила и теоремы, законспектировать примеры лекции.
2. Фотоотчет выполненных упражнений присылать на электронную почту в трехдневный срок.

С уважением, Хвастова Светлана Ивановна

!!! Если возникнут вопросы обращаться по телефону 0721389311 (ватсап).

Электронная почта: xvsviv@rambler.ru

Суммой двух событий А и В называется событие С=А+В, состоящее в появлении или события А, или события В, или обоих вместе. Ключевое слово «или» («либо»).

Произведением двух событий А и В называется событие С=АВ, состоящее в совместном выполнении события А и события В. Ключевое слово «и».

Два события называются *несовместными*, если они не могут появиться одновременно.

Теорема 1. Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:

Теорема 2. Для любого события *A* Вероятность противоположного события *A* Выражается равенством

$$P(`A) = 1 - P(A)$$

Теорема 3. Вероятность суммы двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий минус вероятность их совместного появления:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Теорема сложения обобщается на любое конечное число событий следующим образом:

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) -$$
$$- P(A_1A_2) - P(A_1A_3) - \ldots - P(A_{n-1}A_n) + P(A_1A_2A_3) + \ldots +$$
$$+ P(A_{n-2}A_{n-1}A_n) - \ldots + (-1)^{n-1} P(A_1A_2 \ldots A_n). \qquad (*)$$

Если события *A*1, *A*2, ..., *An Попарно несовместные*, то формула (*) принимает вид:

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n).$$

Замечание. При решении задач с использованием формулы (*) приходится производить громоздкие вычисления, поэтому часто выгоднее перейти к противоположным событиям, т. е. вместо вероятности суммы событий *A*1+*A*2+...+*An* Находить вероятность произведения противоположного события $\overline{A_1}.\overline{A_2}\ldots\overline{A_n}$. Очевидно, что эти два события противоположны, поэтому

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = 1 - P(\overline{A_1}.\overline{A_2}\ldots\overline{A_n}) \quad (**)$$

ПРИМЕР 1. В урне 3 красных и 4 белых шара, 5 красных, 2 белых и 6 черных кубов. Из урны наудачу вынимается одно изделие. Найти вероятность того, что выбранное изделие а) либо белое, либо черное; б) либо красное, либо куб.

РЕШЕНИЕ: а) Рассмотрим события:

А — изделие белое; $P(A) = \frac{6}{20}$, так как всего изделий 20, а белых шесть.

В — изделие черное, $P(B) = \frac{6}{20}$.

Событие С — изделие либо белое, либо черное можно представить как сумму событий А и В. Следовательно, $P(C) = P(A + B)$.

События А и В несовместны, так как вынутое изделие не может быть одновременно и белым и черным. Тогда $P(C) = P(A + B) = P(A) + P(B) = \frac{6}{20} + \frac{6}{20} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$.

б) Введем события

D — изделие красное; $P(D) = \frac{8}{20}$;

E — изделие куб; $P(E)=\frac{13}{20}$;

F — изделие либо красное, либо куб; $\mathbf{P(F)=P(D+E)}$.

События D и E совместны, так как вынутое изделие может оказаться красным кубом $P(D\cdot E)=\frac{5}{20}$. Тогда

$$P(F)=P(D+E)=P(D)+P(E)-P(D\cdot E)=\frac{8}{20}+\frac{13}{20}-\frac{5}{20}=\frac{16}{20}=\frac{4}{5}.$$

ПРИМЕР 2. В первом ящике 1 белый и 5 черных шаров, во втором 8 белых и 4 черных шара. Из каждого ящика вынули по шару. Найти вероятность того, что один из вынутых шаров белый, а другой – черный.

РЕШЕНИЕ:

Обозначим события:

A – вынули белый шар из первого ящика,

$P(A)=\frac{1}{6}$;

$\overline{A}$ - вынули черный шар из первого ящика,

$P(\overline{A})=\frac{5}{6}$;

B – белый шар из второго ящика,

$P(B)=\frac{2}{3}$;

$\overline{B}$ - черный шар из второго ящика,

$P(\overline{B})=\frac{1}{3}$.

Нам нужно, чтобы произошло одно из событий $A\overline{B}$ или $\overline{A}B$. По теореме об умножении вероятностей

$P(A\overline{B})=\frac{1}{18}$, $P(\overline{A}B)=\frac{10}{18}$.

Тогда искомая вероятность по теореме сложения будет $P=P(A\overline{B}+\overline{A}B)=P(A\overline{B})+P(\overline{A}B)=\frac{11}{18}$.

ПРИМЕР 3. Вероятность попадания в цель у первого стрелка 0,8, у второго – 0,9. Стрелки делают по выстрелу. Найти вероятность: а) двойного попадания; б) двойного промаха, в) хотя бы одного попадания; г) одного попадания.

РЕШЕНИЕ:

Пусть A – попадание первого стрелка, $P(A)=0,8$;

B – попадание второго стрелка, $P(B)=0,9$.

Тогда $\overline{A}$ - промах первого, $P(\overline{A})=1-0,8=0,2$;

$\overline{B}$ - промах второго, $P(\overline{B})=1-0,9=0,1$.

Найдем нужные вероятности.

а) AB – двойное попадание, $P(AB)=P(A)P(B)=0,8\cdot 0,9=0,72$

б) $\overline{A}\,\overline{B}$ – двойной промах, $P(\overline{A}\overline{B})=P(\overline{A})P(\overline{B})=0,2\cdot 0,1=0,02$.

в) $A+B$ – хотя бы одно попадание,

$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0,8+0,9-0,72=0,98$.

г) $A\overline{B}+\overline{A}B$ – одно попадание,

$P(A\overline{B}+\overline{A}B)=P(A\overline{B})+P(\overline{A}B)=0,8\cdot 0,1+0,2\cdot 0,9=0,26$.

ПРИМЕР 4. Студент разыскивает нужную ему формулу в трех справочниках. Вероятности того, что формула содержится в первом, втором и третьем справочниках равны 0,6; 0,7 и 0,8. Найти вероятности того, что формула содержится 1) только в одном справочнике; 2) только в двух справочниках; 3) во всех трех справочниках.

РЕШЕНИЕ:

A – формула содержится в первом справочнике;

B – формула содержится во втором справочнике;

C – формула содержится в третьем справочнике.

Воспользуемся теоремами сложения и умножения вероятностей.

1. $P(A\overline{B}\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\overline{B}C)=P(A\overline{B}\overline{C})+P(\overline{A}B\overline{C})+P(\overline{A}\overline{B}C)=$
$=0,6\cdot 0,3\cdot 0,2+0,4\cdot 0,7\cdot 0,2+0,4\cdot 0,3\cdot 0,8=0,188$

2. $P(AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC)=0,6\cdot 0,7\cdot 0,2+0,6\cdot 0,3\cdot 0,8+0,4\cdot 0,7\cdot 0,8=0,452$.

3. $P(ABC) = 0,6 \cdot 0,7 \cdot 0,8 = 0,336$

ПРИМЕР 5. Устройство содержит четыре независимо работающих элемента и сохраняет работоспособность, если работает хотя бы один из элементов. Вероятности безотказной работы элементов в течение определенного срока соответственно равны 0.9, 0.8, 0.7 и 0.6. Найти вероятность безотказной работы устройства.

РЕШЕНИЕ:

Пусть события $A1$ $A2$, $A3$ и $A4$ означают безотказную работу соответственно первого, второго, третьего и четвертого элементов. Событие A={безотказная работа устройства} есть сумма событий: $A=A1+A2+A3+A4$. События $A1$ $A2$, $A3$ И $A4$ совместные, поэтому вероятность $P(A)$ надо вычислять по формуле (2.3). Чтобы упростить вычисления, воспользуемся формулой (**):

$$P(A_1) = P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = 1 - P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\ldots\overline{A_n}).$$

Так как события $A1$ $A2$, $A3$ И $A4$ независимые, то противоположные события $\overline{A_1}, \overline{A_2}, \overline{A_3}, \overline{A_4}$ Также независимы, поэтому

$$P(\overline{A_1}, \overline{A_2}, \overline{A_3}, \overline{A_4}) = P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(\overline{A_3})P(\overline{A_4}) =$$

$$= (1 - P(A_1))(1 - P(A_2))(1 - P(A_3))(1 - P(A_4)) =$$

$= (1 – 0.9)(1 – 0.8)(1 – 0.7)(1 – 0.6) = 0.0024$; и

$P(A) = 1 – 0.0024 = 0.9976$.

ПРИМЕР 6. Производится три независимых выстрела по мишени. Вероятности попадания в мишень при первом, втором и третьем выстрелах соответственно равны 0.2, 0.5, 0.4. Найти вероятность того, что будет *Ровно* два попадания в мишень.

РЕШЕНИЕ:

Событие A={*Ровно Два* Попадания в мишень} выражается через события $A1$={попадание при первом выстреле}, $A2$={попадание при втором выстреле), $A3$={попадание при третьем выстреле} следующим образом:

$$A = A_1 \cdot A_2 \cdot \overline{A_3} + A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot A_3 + \overline{A_1} \cdot A_2 \cdot A_3.$$

Отсюда, учитывая несовместность суммируемых произведений событий и независимость событий $A1$, $A2$, $A3$, находим

$$P(A) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(\overline{A_3}) + P(A_1) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot P(A_3) +$$
$$+ P(\overline{A_1}) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) =$$
$$= 0.2 \cdot 0.5 \cdot 0.6 + 0.2 \cdot 0.5 \cdot 0.4 + 0.8 \cdot 0.5 \cdot 0.4 = 0.26$$

ПРИМЕР 7. В двух урнах находятся шары, отличающиеся только цветом: в первой урне 5 белых шаров, 11 черных и 8 красных, во второй 10 белых, 8 черных и 6 красных. Из обеих урн наудачу извлекают по одному шару. Найти вероятность того, что оба шара одного цвета.

РЕШЕНИЕ:

Введем в рассмотрение следующие события:

$B1$={извлечение белого шара из первой урны},

$B2$={извлечение белого шара из второй урны},

$C1$={извлечение черного шара из первой урны},

$C2$={извлечение черного шара из второй урны},

$D1$={извлечение красного шара из первой урны},

$D2$={извлечение красного шара из второй урны}.

Выразим событие A= {извлечение шаров одного цвета} через эти события:

$A = B1\ B2 + C1\ C2 + D1\ D2$

Следовательно,

$P(A) = P(B1)P(B2) + P(C1)P(C2) + P(D1)P(D2)$.

Вероятности событий B, C, D Найдем из классического определения: $P(B1)=5/24$, $P(B2)=10/24$, $P(C1)=11/24$, $P(C2)=8/24$, $P(D1)=8/24$, $P(D2)=6/24$.

Таким образом, получаем

$$P(A) = \frac{5}{24} \cdot \frac{10}{24} + \frac{11}{24} \cdot \frac{8}{24} + \frac{8}{24} \cdot \frac{6}{24} = \frac{186}{576} = 0.323$$