Задание:

- Повторить теорию;
- Разобрать примеры решения;
- Решить примеры для самостоятельного решения;
- По вопросам обращаться 072-1098278 или hvastov@rambler.ru
- Отчет о работе должен содержать тему и цель практического занятия
- Фотоотчёт прислать в течении 3 дней со дня получения задания на hvastov@rambler.ru

Тема "Производная сложной функции"

Цели: Формирование навыков нахождения производной сложной функции.

Краткая теория

1 Основные правила дифференцирования.

Обозначения: С-постоянная, х-аргумент, u, v и w - функции от х, имеющие производные.

Производная алгебраической суммы функции

$$(u+v-w)'=u'+v'-w' \qquad (1)$$

Производная произведения двух функций

$$(u\cdot v)'=u'\cdot v+u\cdot v' \qquad (2)$$

Производная произведения постоянной на функцию.

$$(c\cdot u)'=cu' \qquad (3)$$

Производная частного (дроби)

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2} \qquad (4)$$

Частные случаи формулы:

$$\left(\frac{u}{c}\right)'=\frac{1}{c}\cdot u' \qquad (5)$$

$$\left(\frac{c}{v}\right)'=-\frac{c}{v^2} \qquad (6)$$

ФОРМУЛЫ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

При условии g=h(x)		При условии g=x	
	1	$c'=0(c-const)$	1а
	2	$x'=1$	2а
$(g^n)'=n\cdot g^{n-1}\cdot g'$	3	$(x^n)'=n\cdot x^{n-1}$	3а
$\left(\frac{1}{g}\right)'=-\frac{1}{g^2}\cdot g'$	4	$\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$	4а
$(\sqrt{g})'=\frac{1}{2\cdot\sqrt{g}}\cdot g'$	5	$(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}$	5а
$(\ln g)'=\frac{1}{g}\cdot g'$	6	$(\ln x)'=\frac{1}{x}$	6а
$(\lg g)'=\frac{0{,}4343}{g}\cdot g'$	7	$(\lg x)'=\frac{0{,}4343}{x}$	7а
$(\log_a g)'=\frac{g'}{g\cdot\ln a}$	8	$(\log_a x)'=\frac{1}{x\cdot\ln a}$	8а
$(a^g)'=a^g\cdot\ln a\cdot g'$	9	$(a^x)'=a^x\cdot\ln a$	9а
$(e^g)'=e^g\cdot g'$	10	$(e^x)'=e^x$	10а

$(\sin g)' = \cos g \cdot g'$	11	$(\sin x)' = \cos x$	11a
$(\cos g)' = -\sin g \cdot g'$	12	$(\cos x)' = -\sin x$	12a
$(tg\, g)' = \frac{1}{\cos^2 g} \cdot g'$	13	$(tg\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	13a
$(\mathrm{ctg}\ \mathrm{g})' = -\frac{1}{\sin^2 \mathrm{g}} \cdot \mathrm{g}'$	14	$(ctg\, x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	14a
$(\arcsin g)' = \frac{1}{\sqrt{1-g^2}} \cdot g'$	15	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	15a
$(\arccos g)' = -\frac{1}{\sqrt{1-g^2}} \cdot g'$	16	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	16a
$(arctg\, g)' = \frac{1}{1+g^2} \cdot g'$	17	$(arctg\, x)' = \frac{1}{1+x^2}$	17a
$(arcctg\, g)' = -\frac{1}{1+g^2} \cdot g'$	18	$(arcctg\, x)' = -\frac{1}{1+x^2}$	18a

2. Дифференцирование сложных функций.

Если - y - есть функция от g: $y = f(g)$;, где g в свою очередь есть функция от аргумента x: $g = h(x)$; т.е. если y зависит от x через промежуточный аргумент g, то y называется ***сложной функцией*** от x

(функцией от функции): $y = f(h(x))$.

Производная сложной функции равна произведению ее производной по промежуточному аргументу на производную этого аргумента по независимой переменной:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dg} \cdot \frac{dg}{dx} \text{ или } y'_x = y'_g \cdot g'_x \qquad (7)$$

Исходя из этого соотношения получены формулы дифференцирования сложных функций, для которых $g = h(x)$.

Формула (7) называется *формулой дифференцирования сложной функции.*

2.1. Производные степени и корня.

При вычислении производных необходимо помнить, что (по определению):

1). $a^0 = 1 (a \neq 0)$ 2). $a^{-n} = \frac{1}{a^n} (a \neq 0)$ 3). $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} (a \rangle 0)$

и знать следующие правила действий со степенями и корнями:

4). $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ 5). $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ 6). $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

7). $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} (a \rangle 0, b \rangle 0)$ 8). $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} (a \rangle 0, b \rangle 0)$

Здесь m и n - любые рациональные числа.

<u>Пример1:</u> Найти производную сложной функции: $y = \left(x^2 - 5x + 8\right)^6$.

<u>Решение</u>: Полагая, $g = x^2 - 5x + 8$, тогда получим $y = g^6$.

По формуле производной сложной функции имеем

$y' = 6g^5 \cdot g' = 6(x^2 - 5x + 8)^5 \cdot (x^2 - 5x + 8)' = 6(x^2 - 5x + 8)^5 \cdot (2x - 5)$.

<u>Пример 2</u>: Найти производную сложной функции: $y = \frac{1}{(x^2 - 1)^4}$.

Решение: Введем отрицательный показатель и применим формулу производной степенной функции

$y=(x^2-1)^{-4}$, тогда производная определяется следующим образом

$$y'=((x^2-1)^{-4})'=-4\cdot(x^2-1)^{-4-1}\cdot(x^2-1)'=-4(x^2-1)^{-5}\cdot 2x=$$

$$=-8x(x^2-1)^{-5}=-\frac{8x}{(x^2-1)^5}$$

Пример 3: Найти производную сложной функции: $y=(x^2+6)\cdot\sqrt{x^2-3}$.

Решение: По формуле производной сложной функции получим

$$y'=\left((x^2+6)\cdot\sqrt{x^2-3}\right)'=(x^2+6)'\cdot\sqrt{x^2-3}+(x^2+6)\left(\sqrt{x^2-3}\right)'.$$

Найдем производные в каждом из слагаемых и выполним преобразования:

$$y'=2x\cdot\sqrt{x^2-3}+(x^2+6)\cdot\frac{2x}{2\sqrt{x^2-3}}=2x\cdot\sqrt{x^2-3}+\frac{x^3+6x}{\sqrt{x^2-3}}=$$

$$=\frac{2x\cdot\left(\sqrt{x^2-3}\right)^2+x^3+6x}{\sqrt{x^2-3}}=\frac{2x\cdot(x^2-3)+x^3+6x}{\sqrt{x^2-3}}=\frac{2x^3-6x+x^2+6x}{\sqrt{x^2-3}}=$$

$$=\frac{3x^3}{\sqrt{x^2-3}}$$

2.2. Дифференцирование логарифмических функций.

Пример 4: Вычислить производные следующих функций:

1) $y=\ln(ax^2+b)$; 2). $y=\log_2(5x^2-3)$.

Решение:

1). $y'=(\ln(ax^2+b))'=\frac{1}{ax^2+b}\cdot(ax^2+b)'=\frac{1}{ax^2+b}\cdot 2ax=\frac{2ax}{ax^2+b}$

2). $y'=(\log_2(5x^2-3))'=\frac{1}{(5x^2-3)\cdot\ln 2}\cdot(5x^2-3)'=$

$$=\frac{1}{(5x^2-3)\cdot\ln 2}\cdot 10x=\frac{10x}{(5x^2-3)\cdot\ln 2}$$

2.3. Дифференцирование показательных функций.

Примеры: Вычислить производные следующих функций:

1) $y=3^{2x^2}$; 2) $y=e^{-2x}$;

Решение:

1) $y'=\left(3^{2x^2}\right)'=3^{2x^2}\cdot\ln 3\cdot(2x^2)'=3^{2x^2}\cdot\ln 3\cdot 4x=4x\cdot 3^{2x^2}\cdot\ln 3$

2) $y'=\left(e^{-2x}\right)'=e^{-2x}\cdot(-2x)'=e^{-2x}\cdot(-2)=-2e^{-2x}$

2.4. Дифференцирование тригонометрических функций.

Примеры: Вычислить производные следующих функций:

1) $y=\sin(2x^2+3)$; 2) $y=\sin^3 mx$;

Решение:

1) $y=\sin(2x^2+3)$. Полагая, что $g=2x^2+3$, получим $y=\sin g$.По формуле (11) находим

$$y'=\left(\sin(2x^2+3)\right)'=\cos g\cdot g'=\cos(2x^2+3)\cdot(2x^2+3)'=$$

$$=\cos(2x^2+3)\cdot 4x=4x\cos(2x^2+3)$$

2) $y=\sin^3 mx$. Полагая, что $g=mx$, получим $y=\sin^3 g$.

Применяя последовательно формулы нахождения степенной и тригонометрической функции имеем:

$$y' = \left(\sin^3 mx\right)' = 3\sin^2 g \cdot (\sin g)' = 3\sin^2 g \cdot (\cos g) \cdot (g)' =$$
$$= 3\sin^2 mx \cdot \cos mx \cdot m = 3m\sin^2 mx \cdot \cos mx$$

ЗАДАНИЯ

Задание 1. Вычислить производные следующих функций:

№ варианта	Исходные данные	№ варианта	Исходные данные
Вариант 1	$y = \left(2x^3 - 2x^2 + 5\right)^2$	Вариант 9	$y = \left(2x^3 + 2x^2 + 4\right)^2$
Вариант 2	$y = \left(3x^4 - x^3 + 2x\right)^3$	Вариант 10	$y = \left(3x^4 + 4x^3 + 2\right)^3$
Вариант 3	$y = \left(4x^3 + 2x^2 - 2\right)^4$	Вариант 11	$y = \left(4x^3 + 5x^2 - 4\right)^4$
Вариант 4	$y = \left(5x^4 + x^3 - 2x\right)^5$	Вариант 12	$y = \left(5x^4 + 6x^3 + 2\right)^5$
Вариант 5	$y = \left(5x^3 - 2x^2 + 3x\right)^2$	Вариант 13	$y = \left(5x^3 - 6x^2 + 3\right)^2$
Вариант 6	$y = \left(4x^4 - x^3 + 2x\right)^3$	Вариант 14	$y = \left(4x^4 - 5x^3 + 2\right)^3$
Вариант 7	$y = \left(3x^3 + 2x^2 + x\right)^4$	Вариант 15	$y = \left(3x^3 + 4x^2 + 3\right)^4$
Вариант 8	$y = \left(2x^4 - 3x^2 - 4\right)^5$	Вариант 16	$y = \left(2x^4 - 3x^2 + 4\right)^5$

Задание 2. Вычислить производные следующих функций:

№ варианта	Исходные данные	№ варианта	Исходные данные
Вариант 1	$y = \frac{1}{(4-2x^3)^2}$	Вариант 9	$y = \frac{8}{(4-2x^3)^2}$
Вариант 2	$y = \frac{2}{(3-2x^3)^3}$	Вариант 10	$y = \frac{7}{(3-3x^3)^3}$
Вариант 3	$y = \frac{3}{(2-4x^3)^4}$	Вариант 11	$y = \frac{6}{(2-4x^3)^4}$
Вариант 4	$y = \frac{4}{(1-5x^3)^5}$	Вариант 12	$y = \frac{5}{(1-6x^3)^5}$
Вариант 5	$y = \frac{5}{(4-5x^3)^2}$	Вариант 13	$y = \frac{4}{(4-2x^3)^2}$
Вариант 6	$y = \frac{6}{(3-4x^3)^3}$	Вариант 14	$y = \frac{3}{(3-3x^3)^3}$
Вариант 7	$y = \frac{7}{(2-4x^3)^4}$	Вариант 15	$y = \frac{2}{(2-4x^3)^4}$
Вариант 8	$y = \frac{8}{(1-4x^3)^5}$	Вариант 16	$y = \frac{1}{(1-5x^3)^5}$

Задание 3. Вычислить производные следующих функций:

№ варианта	Исходные данные	№ варианта	Исходные данные
Вариант 1	$y = \frac{(x^2+1)^2}{(x^9-1)^3}$	Вариант 9	$y = \frac{(x^2+1)^3}{(x^9-1)^2}$
Вариант 2	$y = \frac{(x^3+1)^3}{(x^8-1)^4}$	Вариант 10	$y = \frac{(x^3-1)^3}{(x^8+1)^4}$
Вариант 3	$y = \frac{(x^4+1)^2}{(x^7-1)^3}$	Вариант 11	$y = \frac{(x^4+1)^3}{(x^7-1)^2}$

Вариант 4	$y=\frac{(x^5+1)^3}{(x^6-1)^2}$	Вариант 12	$y=\frac{(x^5-1)^3}{(x^6+1)^2}$
Вариант 5	$y=\frac{(x^6+1)^2}{(x^5-1)^3}$	Вариант 13	$y=\frac{(x^6+1)^3}{(x^5-1)^2}$
Вариант 6	$y=\frac{(x^7+1)^3}{(x^4-1)^2}$	Вариант 14	$y=\frac{(x^7-1)^2}{(x^4+1)^3}$
Вариант 7	$y=\frac{(x^8+1)^2}{(x^3-1)^3}$	Вариант 15	$y=\frac{(x^8+1)^4}{(x^3-1)^3}$
Вариант 8	$y=\frac{(x^9+1)^3}{(x^2-1)^2}$	Вариант 16	$y=\frac{(x^9-1)^2}{(x^2+1)^3}$

Задание 4. Вычислить производные следующих функций:

№ варианта	Исходные данные	№ варианта	Исходные данные
Вариант 1	$y=\sqrt{2x^2-4x+6}$	Вариант 9	$y=\sqrt{2x^2+4x-1}$
Вариант 2	$y=\sqrt{3x^2-6x+1}$	Вариант 10	$y=\sqrt{3x^2+6x-2}$
Вариант 3	$y=\sqrt{4x^2-4x+6}$	Вариант 11	$y=\sqrt{4x^2+4x-3}$
Вариант 4	$y=\sqrt{2x^2-5x+1}$	Вариант 12	$y=\sqrt{2x^2+5x-4}$
Вариант 5	$y=\sqrt{3x^2-4x+6}$	Вариант 13	$y=\sqrt{3x^2+4x-1}$
Вариант 6	$y=\sqrt{4x^2-3x+1}$	Вариант 14	$y=\sqrt{4x^2-3x-2}$
Вариант 7	$y=\sqrt{2x^2-2x+6}$	Вариант 15	$y=\sqrt{2x^2+4x-3}$
Вариант 8	$y=\sqrt{3x^2-2x+1}$	Вариант 16	$y=\sqrt{3x^2+2x-4}$

Задание 5. Вычислить производные следующих функций:

№ варианта	Исходные данные	№ варианта	Исходные данные
Вариант 1	$y=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	Вариант 9	$y=\frac{8}{\sqrt{x^2+9}}$
Вариант 2	$y=\frac{2}{\sqrt{1-x^3}}$	Вариант 10	$y=\frac{7}{\sqrt{4-x^3}}$
Вариант 3	$y=\frac{3}{\sqrt{x^4-1}}$	Вариант 11	$y=\frac{6}{\sqrt{x^4-8}}$
Вариант 4	$y=\frac{4}{\sqrt{x^2-1}}$	Вариант 12	$y=\frac{5}{\sqrt{x^2-7}}$
Вариант 5	$y=\frac{5}{\sqrt{x^2+4}}$	Вариант 13	$y=\frac{4}{\sqrt{x^2+6}}$
Вариант 6	$y=\frac{6}{\sqrt{x^2-5}}$	Вариант 14	$y=\frac{3}{\sqrt{x^2-5}}$
Вариант 7	$y=\frac{7}{\sqrt{x^3+1}}$	Вариант 15	$y=\frac{2}{\sqrt{x^3+4}}$
Вариант 8	$y=\frac{8}{\sqrt{x^2-4}}$	Вариант 16	$y=\frac{1}{\sqrt{x^2-3}}$

Задание 6. Вычислить производные следующих функций:

№ варианта	Исходные данные	№ варианта	Исходные данные
Вариант 1	$y=(x+1)^2\sqrt{x^2-1}$	Вариант 9	$y=(3x+1)^2\sqrt{x^2-4}$
Вариант 2	$y=(2x-1)^2\sqrt{1-2x}$	Вариант 10	$y=(2x-1)^2\sqrt{1+2x}$

Вариант 3	$y=(x+1)^3\sqrt{x^2-1}$	Вариант 11	$y=(4x+1)^3\sqrt{x^2-3}$
Вариант 4	$y=(2x-1)^3\sqrt{1-2x}$	Вариант 12	$y=(2x-1)^3\sqrt{1+3x}$
Вариант 5	$y=(x+1)^4\sqrt{x^2-1}$	Вариант 13	$y=(5x+1)^4\sqrt{x^2-2}$
Вариант 6	$y=(2x-1)^4\sqrt{1-2x}$	Вариант 14	$y=(2x-1)^4\sqrt{1+4x}$
Вариант 7	$y=(x+1)^5\sqrt{x^2-1}$	Вариант 15	$y=(6x+1)^5\sqrt{x^2-1}$
Вариант 8	$y=(2x-1)^5\sqrt{1-2x}$	Вариант 16	$y=(2x-1)^5\sqrt{1+5x}$

Задание 7. Вычислить производные следующих функций:

№ варианта	Исходные данные	№ варианта	Исходные данные
Вариант 1	$y=\frac{1+2x}{\sqrt{x^2+1}}$	Вариант 9	$y=\frac{2+2x}{\sqrt{x^2+9}}$
Вариант 2	$y=\frac{1-2x}{\sqrt{1-x^2}}$	Вариант 10	$y=\frac{3-2x}{\sqrt{4-x^3}}$
Вариант 3	$y=\frac{1+3x}{\sqrt{x^4-1}}$	Вариант 11	$y=\frac{4+3x}{\sqrt{x^4-8}}$
Вариант 4	$y=\frac{1-3x}{\sqrt{x^2-1}}$	Вариант 12	$y=\frac{5-3x}{\sqrt{x^2-7}}$
Вариант 5	$y=\frac{1+4x}{\sqrt{x^2+4}}$	Вариант 13	$y=\frac{6+4x}{\sqrt{x^2+6}}$
Вариант 6	$y=\frac{1-4x}{\sqrt{x^2-5}}$	Вариант 14	$y=\frac{7-4x}{\sqrt{x^2-5}}$
Вариант 7	$y=\frac{1+5x}{\sqrt{x^3+1}}$	Вариант 15	$y=\frac{8+5x}{\sqrt{x^3+4}}$
Вариант 8	$y=\frac{1-5x}{\sqrt{x^2-4}}$	Вариант 16	$y=\frac{9-5x}{\sqrt{x^2-3}}$

Карта полученных результатов

№ задания	Результаты выполненных заданий (ответы)
Задание 1	
Задание 2	
Задание 3	
Задание 4	
Задание 5	
Задание 6	
Задание 7	

Контрольные вопросы:

1. Какими символами обозначается производная?
2. Назвать формулу производной алгебраической суммы?
3. Назвать формулу производной произведения?
4. Назвать формулу производной частного?
5. Назвать формулу производной постоянного числа?
6. Назвать формулу производной линейной функции?
7. Назвать формулу производной степенной функции с рациональным показателем?
8. Как вычисляется производная логарифмической функции с натуральным основанием?