Уважаемые студенты!

- Повторите теоретический материал;
- По вопросам обращаться 072-1098278 или hvastov@rambler.ru
- Фотоотчёт конспекта прислать в течение 3 дней со дня получения задания на hvastov@rambler.ru

Практическое занятие по теме:

Использование векторов при доказательстве теорем стереометрии.

Цель: Закрепление теоретических знаний по использованию векторов при доказательстве теорем стереометрии

Содержание:

Задание 1: Изучите дополнительный материал.

Учёные всегда стремились упростить себе жизнь – придумывали новые, простые методы решения, универсальные для множества задач, позволяющие быстро решить даже самую трудную задачу. Именно таким методом и является векторно-координатный.

«Векторный» путь построения геометрии предложил в 1918 году известный немецкий математик Герман Вейль. Векторы можно использовать как для решения планиметрических задач, так и для стереометрических.

Векторно-координатный метод решения задач позволяет с лёгкостью решать даже

самые громоздкие и сложные задачи, избегать долгих доказательств теорем. С помощью векторов можно вычислять расстояния и углы, доказывать теоремы, строить перпендикулярные и параллельные прямые и отрезки, строить сечения, доказывать равенство геометрических фигур и многое другое. Использование этого метода при решении задач также способствует развитию творческого мышления, ведь векторы, используемые при решении задачи, необходимо выбрать самому.

В настоящее время векторно-координатный метод используется в алгебре, геометрии, физике, механике; понятие векторного пространства используется в теории вероятностей, математической экономике, биологии, лингвистике и т.д.

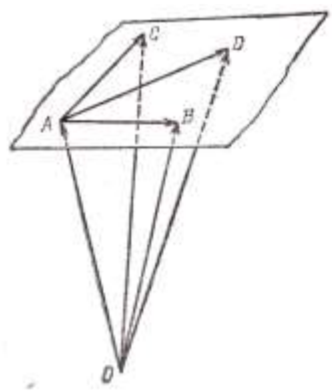
Краткая историческая справка

Вейль, Герман Клаус Гуго (Hermann Klaus Hugo Weyl) (1885-1955)-немецкий математик. Окончил Геттинтенский университет. В 1913-1930 годах – профессор Цюрихского политехнического, в 1930-1933 годах – профессор Геттингенского университета, после прихода к власти фашистов в 1933 году эмигрировал в США, работал в Принстоне в институте перспективных исследований.

Труды посвящены тригонометрическим рядам и рядам по ортогональным функциям, теории функций комплексного переменного, дифференциальным и интегральным уравнениям. Ввёл в теорию чисел т. н. «Суммы Вейля»Труды Вейля по прикладной линейной алгебре имели значение для последующего создания математического программирования, а работы в области математической логики и оснований математики до сих пор вызывают интерес. В 1918 году предложил «векторный» путь построения геометрии.

Доказательство некоторых теорем:

1)Пусть точки A, B, C и P такие, что OP=mOA+nOB+pOC (OA, OC и OB линейно независимы).Тогда необходимое и достаточное условие их принадлежности одной прямой состоит в следующем: m+n+p=1.

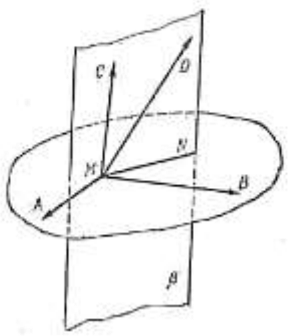


Доказательство необходимости:
Пусть точки A, B, C и P лежат в одной плоскости, тогда векторы
$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}$ будут линейно зависимыми, следовательно
$\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=n(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})+p(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})$,
$\overrightarrow{OP}=(1- n- p)\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}+p\overrightarrow{OC}$
И в силу единственности разложения вектора OP по векторам OA, OB, OC получимm=1- n –p или m+ n+ p=1

Доказательство достаточности:
Пусть m+n+p=1, тогда
$\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}+p\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}+p\overrightarrow{OC}-(m+n+p)*\overrightarrow{OA}=n(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})+p(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})$

Отсюда $\overrightarrow{AP}=n\overrightarrow{AB}+p\overrightarrow{AC}$ и по определению P принадлежит плоскости ABC.

2)Если две плоскости α и β имеют общую точку M, то найдётся по меньшей мере, ещё одна общая точка N у этих плоскостей.



Доказательство:

Так как плоскость может быть задана любыми тремя точками, не лежащими на одной прямой, то плоскость α можно задать точками M, A, B, а плоскость β – точками M, C и D.

На основании теоремы о том, что любой вектор может быть представлен в виде линейной комбинации любых трёх линейно независимых векторов можно записать:

$$\overrightarrow{MD} = k_1\overrightarrow{MA} + k_2\overrightarrow{MB} + k_3\overrightarrow{MC}$$ или:

$$\overrightarrow{MD} + (-k_3)\overrightarrow{MC} = k_1\overrightarrow{MA} + k_2\overrightarrow{MB} = \vec{a}.$$

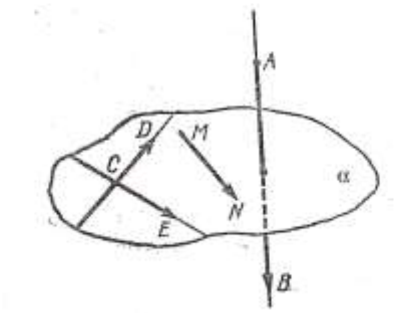
→ →

Построим вектор MN=a. Имеем:

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MD} + (-k_3)\,\overrightarrow{MC} \Rightarrow N \in MDC,$$
$$\overrightarrow{MN} = k_1\overrightarrow{MA} + k_2\overrightarrow{MB} \Rightarrow N \in MAB.$$

Докажем теперь. что $\overline{M=N}$. Если допустить, что M=N, то $\overrightarrow{MN}=0$, тогда $\overrightarrow{MD}+(-k_3)\overrightarrow{MC}=0$, или $\overrightarrow{MD}=k_3\overrightarrow{MC}$. Это означает, что векторы $\overrightarrow{MD}$ и $\overrightarrow{MC}$ линейно зависимы и точки M, C и D лежат на одной прямой, что противоречит их выбору. Следовательно, M=N. Теорема доказана.

3)Признак перпендикулярности прямой и плоскости: Если прямая AB перпендикулярна к двум пересекающимся прямым CD и CE, принадлежащим плоскости α, то прямая AB $\perp$ α.



Доказательство:

Пусть MN – произвольный вектор плоскости α и MN≠0. Так как векторы CD и CE

не компланарны, то $\overrightarrow{MN} = n\overrightarrow{CD}+m\overrightarrow{CE}$. Тогда

$\overrightarrow{AB}*\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AB}(n\overrightarrow{CD}+m\overrightarrow{CE})=\overrightarrow{AB}(n\overrightarrow{CD})=\overrightarrow{AB}(m\overrightarrow{CE})=n(\overrightarrow{AB}*\overrightarrow{CD})+m(\overrightarrow{AB}*\overrightarrow{CE})$. По условию $\overrightarrow{AB}*\overrightarrow{CD}=0$ и $\overrightarrow{AB}*\overrightarrow{CE}=0$. Отсюда $\overrightarrow{AB}*\overrightarrow{MN}=n*0+m*0=0$, т.е. $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{MN}$. Тогда по определению прямой, перпендикулярной к плоскости, AB $\perp$ α. ,ч.т.д.

Заключение

Таким образом, мы убедились, что использование векторно-координатного метода позволяет с лёгкостью решать множество задач самых разных типов, избегать громоздких доказательств теорем. Решать таким методомзадачи очень просто и интересно, можно сэкономить время и силы. Такое решение задач хорошо тем, что человек не механически действует по образцу решения задач данного типа, повторяя одни и те же действия, а творчески подходит к работе. Хотя и можно распределить векторно решаемые задачи на группы, но каждое решение всё-таки обладает индивидуальностью, неповторимостью.

Задание 2: Воспроизведи самостоятельно одно из доказательств теорем на оценку.

Требования к содержанию отчета по работе:

Отчет о работе должен содержать тему и цель практического занятия.
В ходе работы должно быть выполнено предложенное задание 2.