Уважаемые студенты!

Вашему вниманию представлена лекция на тему «Двойственность. Принцип двойственности.»

Задание

1. Записать правила, законспектировать примеры лекции.
2. Фотоотчет выполненных упражнений присылать на электронную почту (и только на электронную почту!) в трехдневный срок

С уважением, Хвастова Светлана Ивановна

!!! Если возникнут вопросы обращаться по телефону 0721389311 (ватсап).

Электронная почта: xvsviv@rambler.ru

Принцип двойственности. Функция, заданная формулой $\overline{f}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n)$, называется *двойственной* к функции $f(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Функцию, двойственную к f, обозначают f^*, таким образом, $f^*(x_1, x_2 ..., x_n) = \overline{f}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n)$.

Пример 1. Используя определение, найти функции, двойственные к дизъюнкции, конъюнкции и функциям одной переменной.

◀ Пусть $f(x_1, x_2) = x_1 \vee x_2$. Тогда

$$f^*(x_1, x_2) = \overline{\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2} = \overline{\overline{x}}_1 \wedge \overline{\overline{x}}_2 = x_1 \wedge x_2.$$

Пусть $f(x_1, x_2) = x_1 \wedge x_2$. Тогда

$$f^*(x_1, x_2) = \overline{\overline{x}_1 \wedge \overline{x}_2} = \overline{\overline{x}}_1 \vee \overline{\overline{x}}_2 = x_1 \vee x_2.$$

Пусть $f(x) = x$. Тогда $f^*(x) = \overline{(\overline{x})} = x$.

Пусть $f(x) = \overline{x}$. Тогда $f^*(x) = \overline{\left(\overline{(\overline{x})}\right)} = \overline{x}$.

Пусть $f(x) = 0$. Тогда $f^*(x) = \overline{0} = 1$.

Пусть $f(x) = 1$. Тогда $f^*(x) = \overline{1} = 0$. ▶

Сравним таблицы истинности произвольной функции $f(x_1, x_2)$ и двойственной к ней функции $f^*(x_1, x_2)$ (см. таблицу 1).

Таблица 1

x_1	x_2	$f(x_1, x_2)$	$f^*(x_1, x_2)$
0	0	$f(0,0)$	$\overline{f}(\overline{0},\overline{0}) = \overline{f}(1,1)$
0	1	$f(0,1)$	$\overline{f}(\overline{0},\overline{1}) = \overline{f}(1,0)$
1	0	$f(1,0)$	$\overline{f}(\overline{1},\overline{0}) = \overline{f}(0,1)$
1	1	$f(1,1)$	$\overline{f}(\overline{1},\overline{1}) = \overline{f}(0,0)$

Нетрудно заметить, что столбец значений функции f^* можно получить из столбца значений функции f, действуя по следующему алгоритму:

1) столбец значений функции f переписать в обратном порядке (т.е. число, стоящее в первой строке, записать в последнюю строку; число, стоящее во второй строке, - в предпоследнюю строку и т.д.);

2) в получившемся в результате выполнения п. 1 столбце значений каждое число заменить его отрицанием (0 заменить 1 и 1 заменить 0).

Очевидно, что этот алгоритм можно использовать для построения двойственной функции в случае любого числа аргументов.

Если функция задана вектором значений, то роль столбца значений в алгоритме выполняет вектор значений.

Пример 2. Задать вектором значений функцию, двойственную к данной:

а) $f = (1101)$; б) $f = (1001\ \ 0000)$.

◀ а) $f = (1101) \mapsto (1011) \mapsto f^* = (0100)$;

б) $f = (1001\ \ 0000) \mapsto (0000\ \ 1001) \mapsto f^* = (1111\ \ 0110)$. ▶

На примерах мы имели возможность убедиться, что отношение двойственности между функциями симметрично, т.е. если функция $g = f^*$, то функция $f = g^*$. Это утверждение несложно обосновать теоретически.

Действительно, пусть $g(x_1, x_2, ..., x_n) = f^*(x_1, x_2, ..., x_n)$. Тогда

$$g^*(x_1, x_2, ..., x_n) = \left(f^*(x_1, x_2, ..., x_n)\right)^* = \left(\overline{f}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n)\right)^* =$$

$$= \overline{\overline{f}}(\overline{\overline{x}}_1, \overline{\overline{x}}_2, ..., \overline{\overline{x}}_n) = f(x_1, x_2, ..., x_n).$$

Пусть функция f задана формулой, и мы хотим построить формулу для двойственной к ней функции $f*$. Согласно определению, это можно сделать, заменив в формуле, которой задана f, каждую переменную ее отрицанием и взяв отрицание от самой формулы (именно так мы поступили в примере 1).

Рассмотрим другой способ построения формулы для f^* по формуле, представляющей f. Этот способ основан на **принципе двойственности:** *если формула* $\Phi[f_1, f_2, ..., f_n]$ *задает функцию* g*, то формула, полученная из нее заменой символов функций* $f_1, f_2, ..., f_n$ *на символы двойственных к ним функций* $f_1^*, f_2^*, ..., f_n^*$*, задает функцию* g^**, двойственную к функции* g. Полученную таким образом формулу будем называть *двойственной* к $\Phi[f_1, f_2, ..., f_n]$ и обозначать $\Phi^*[f_1, f_2, ..., f_n]$.

Доказательство принципа двойственности приведено во второй части параграфа.

Если функция задана формулой над множеством $\{0,1,x,\bar{x},x\wedge y,x\vee y\}$, то, используя пример 1, принципу двойственности можно придать более конкретный вид: если в формуле Φ, представляющей функцию f, все конъюнкции заменить на дизъюнкции, дизъюнкции - на конъюнкции, 1 на 0, 0 на 1, то получим формулу Φ^*, представляющую функцию f^*, двойственную к f.

Пример 3. Задать формулой функцию, двойственную к данной:

а) $f=\overline{x\vee z\bar{y}}$; б) $f=(x\vee\bar{y})yz\vee 1$.

◀ а) $f^*=\left(\overline{x\vee z\bar{y}}\right)^*=\overline{x\wedge(z\vee\bar{y})}$.

Обратим внимание на следующее обстоятельство. В записи формулы, представляющей f, конъюнкция вследствие соглашения о краткой записи формул в скобки не взята. Строя двойственную формулу, мы меняем конъюнкцию на дизъюнкцию. При этом следует учитывать, что связка «$\vee$» имеет меньший приоритет выполнения, чем «$\wedge$», значит, чтобы двойственная формула сохранила структуру исходной формулы, при переходе от

конъюнкции к дизъюнкции нужно взять дизъюнкцию в скобки. В то же время при переходе от дизъюнкции к конъюнкции скобки можно опустить.

б) $f^* = \left((x \vee \bar{y})yz \vee 1\right)^* = (x\bar{y} \vee y \vee z) \wedge 0$. ►

Если функции равны, то и двойственные к ним функции равны. В сочетании с принципом двойственности это очевидное обстоятельство позволяет получать новые равносильности, переходя от равенства $\Phi_1 = \Phi_2$ к равенству $\Phi_1^* = \Phi_2^*$.

Действительно, от равенства $x \vee y = y \vee x$ перейдем к равенству $(x \vee y)^* = (y \vee x)^*$ и, заменив дизъюнкцию на конъюнкцию, а конъюнкцию на дизъюнкцию, получим равенство $x \wedge y = y \wedge x$.

Примерами других пар, связанных законом двойственности, являются равносильности 3 и 4, 5 и 6, 7 и 8, 9 и 10, 11 и 12, 13 и 14, 15 и 16, 17 и 18.

Пример 4. Задать функцию, двойственную к функции $f(x, y, z) = \bar{z}x \vee \left(x \downarrow y\right)$:

а) вектором значений.

◄ а) Зададим таблично (см. таблицу 2) функцию $f(x, y, z) = \bar{z}x \vee \left(x \downarrow y\right)$.

Таблица 2

x	y	z	$\bar{z}$	$\bar{z}x$	$x \downarrow y$	$f = \bar{z}x \vee \left(x \downarrow y\right)$
0	0	0	1	0	1	1
0	0	1	0	0	1	1
0	1	0	1	0	0	0
0	1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	1	0	1
1	0	1	0	0	0	0
1	1	0	1	1	0	1
1	1	1	0	0	0	0

Далее: $f = (11001010) \mapsto (01010011) \mapsto f^* = (10101100)$. ►