Уважаемые студенты!

Вашему вниманию представлена лекция на тему «Дизъюнктивные нормальные формы»

Задание

1. Прочитать внимательно лекцию.
2. Законспектировать лекцию в рабочую тетрадь.
3. Придумать вопросы для самопроверки к лекции, записав их на полях конспекта.
4. Фото конспекта лекций присылать на электронную почту (и только на электронную почту!) в трехдневный срок

С уважением, Хвастова Светлана Ивановна

!!! Если возникнут вопросы обращаться по телефону 0721389311 (ватсап).

Электронная почта: xvsviv@rambler.ru

Дизъюнктивные нормальные формы

Определение. Элементарной конъюнкцией называется конъюнкция литералов (переменных или их отрицаний), взятых не более чем по одному разу.

Например, конъюнкции $x_1\bar{x}_3$, $x_1x_2x_3$, 1 являются элементарными. Причем первая элементарная конъюнкция имеет ранг (число литералов) 2, вторая - 3, а третья - 0.

Следующие конъюнкции: $x_1\bar{x}_1$, $x_1x_2x_2$, $x_1\overline{x_2x_3}$, $x_1\overline{\bar{x}_2x_3}$, 0 не являются элементарными.

Определение. Элементарная конъюнкция булевой функции $F = F(x_1, x_2, ..., x_n)$ содержащая n литералов, называется полной (или минтермом).

Определение. Дизъюнкция любого конечного множества элементарных конъюнкций булевой функции F называется дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ) функции F. Число элементарных конъюнкций (слагаемых, термов), составляющих ДНФ, называется длиной ДНФ.

Например, ДНФ $F = x_1\bar{x}_2 \vee x_2x_3x_4 \vee \bar{x}_2\bar{x}_4$ имеет длину, равную 3.

Для произвольной булевой функции F существует, вообще говоря, много различных реализующих ее ДНФ, отличающихся друг от друга длиной, числом вхождений литералов и т.д.

Определение. Две (или несколько) ДНФ, реализующих одну и ту же булеву функцию F , называются эквивалентными (или равносильными).

Например, для функции $F = F(x_1, x_2, x_3)$, заданной приведенной выше таблицей истинности, существуют следующие эквивалентные ДНФ:

$$F = \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 x_2 x_3, \quad (1)$$

$$F = x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2 x_3, \quad (2)$$

$$F = x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2, \quad (3)$$

$$F = x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 x_3 \vee x_1 x_2, \quad (4)$$

$$F = x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 x_3. \quad (5)$$

Определение. ДНФ булевой функции *F*, состоящая только из полных элементарных конъюнкций, называется совершенной ДНФ (СДНФ).

Например, (1) - СДНФ функции *F*.

Отметим, что СДНФ является единственной (с точностью перестановки слагаемых) для конкретной булевой функции F .

Любую булеву функцию F, заданную формулой, можно с помощью основных равносильностей преобразовать к ДНФ, а затем к СДНФ.

Пример. Привести к виду СДНФ булеву функцию $F=(\bar{x}_1 \downarrow x_3) \oplus x_2$.

Решение. С помощью основных равносильностей преобразуем к ДНФ:
$(\bar{x}_1 \downarrow x_3) \oplus x_2 = \overline{(\bar{x}_1 \vee x_3)} \oplus x_2 = x_1\bar{x}_3 \oplus x_2 = x_1\bar{x}_3\bar{x}_2 \vee \overline{x_1\bar{x}_3}x_2 =$
$= x_1\bar{x}_3\bar{x}_2 \vee (\bar{x}_1 \vee x_3)x_2 = x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_2 \vee x_2x_3$ - ДНФ.

Применяя закон склеивания (в обратном порядке: $x = xy \vee x\bar{y}$), дополняем конъюнкции $\bar{x}_1x_2$, x_2x_3 до полных элементарных конъюнкций:

$$x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_2 \vee x_2x_3 = x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1x_3x_2 \vee \bar{x}_1x_2x_3.$$

Т.к. $x \vee x = x$, после сокращения одинаковых конъюнкций, получаем СДНФ: $F= x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1x_3x_2$.

Составим таблицу истинности для булевой функции $F=(\bar{x}_1 \downarrow x_3) \oplus x_2$ (функция из предыдущего примера). Отметим связь между СДНФ и таблицей истинности.

Таблица истинности СДНФ

x_1	x_2	x_3	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_1 \downarrow x_3$	$F=(\bar{x}_1 \downarrow x_3) \oplus x_2$	Элементарные конъюнкции СДНФ
0	0	0	1	0	0	
0	0	1	1	0	0	
0	1	0	1	0	1	$\bar{x}_1x_2\bar{x}_3$
0	1	1	1	0	1	$\bar{x}_1x_2x_3$
1	0	0	0	1	1	$x_1\bar{x}_2\bar{x}_3$
1	0	1	0	0	0	
1	1	0	0	1	0	
1	1	1	0	0	1	$x_1x_3x_2$

В общем случае также можно вывести закономерности построения СДНФ по таблице истинности булевой функции, что является очень удобным.

СДНФ состоит из дизъюнкций полных элементарных конъюнкций наборов переменных $x_1, x_2, ..., x_n$, на которых функция принимает значение 1. Переменные берутся без отрицания, если им соответствует в таблице истинности 1, с отрицанием, если 0.

Пример. По таблице истинности составить СДНФ

x_1	x_2	x_3	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Решение: СДНФ: $F = x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1x_2x_3$.

Пример. Для булевой функции, заданной в виде ДНФ $F = x_1 \vee x_2\bar{x}_3$ составить СДНФ и выполнить проверку по таблице истинности.

Решение: Применяя закон склеивания (в обратном порядке: $x = xy \vee x\bar{y}$), дополняем конъюнкции, до полных элементарных конъюнкций. Конъюнкцию x_1 дополняем в два этапа, т.к. $x_1\overline{x_2x_3}$ не является элементарной конъюнкцией.

$F = x_1 \vee x_2\bar{x}_3 = x_1x_2 \vee x_1\bar{x}_2 \vee x_1x_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 =$

$= x_1x_2x_3 \vee x_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1x_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 =$

Т.к. $x \vee x = x$, после сокращения одинаковых конъюнкций, получаем СДНФ:

$= x_1x_2x_3 \vee x_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3$.

Таблица истинности СДНФ

x_1	x_2	x_3	$\bar{x}_3$	$x_2\bar{x}_3$	$F = x_1 \vee x_2\bar{x}_3$	Элементарные конъюнкции СДНФ
0	0	0	1	0	0	
0	0	1	1	0	0	
0	1	0	1	1	1	$\bar{x}_1x_2\bar{x}_3$
0	1	1	1	0	0	
1	0	0	0	1	1	$x_1\bar{x}_2\bar{x}_3$
1	0	1	0	0	1	$x_1\bar{x}_3x_2$
1	1	0	0	1	1	$x_1x_3\bar{x}_2$
1	1	1	0	0	1	$x_1x_3x_2$