Уважаемые студенты!

Задание

1. Прочитать внимательно лекцию, законспектировать.

2. Фотоотчет конспекта лекций прислать на электронную почту (и только на электронную почту!) в трехдневный срок

С уважением, Хвастова Светлана Ивановна

!!! Если возникнут вопросы обращаться по телефону 0721389311 (ватсап). Электронная почта: xvsviv@rambler.ru

Лекция на тему: «Совершенные дизъюнктивные нормальные формы и совершенные конъюнктивные нормальные формы.»

Задание функции совершенной дизъюнктивной нормальной формой. Мы умеем переходить от реализации функции формулой к заданию ее таблицей истинности. Не меньший интерес представляет обратный переход - от таблицы истинности к формуле. Этот переход неоднозначен - формул, которыми можно задать любую булеву функцию, бесконечно много. Особый интерес имеет задание функций через дизъюнкцию, конъюнкцию и отрицание.

Введем обозначения: $x^0 = \bar{x}$, $x^1 = x$.

Каждую булеву функцию f *от* n *переменных, за исключением тождественно равной нулю, можно задать формулой*

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \bigvee_{\substack{(\sigma_1,...,\sigma_n) \\ f(\sigma_1,...,\sigma_n)=1}} \left(x_1^{\sigma_1} \wedge ... \wedge x_n^{\sigma_n} \right)$$

(здесь дизъюнкция берется по всевозможным наборам значений переменных $x_1, x_2, ..., x_n$, на которых функция f равна 1).

Эту формулу называют *совершенной дизъюнктивной нормальной формой* (сокращенно СДНФ).

Доказательство этого утверждения приведено во второй части параграфа.

Чтобы построить СДНФ функции, нужно действовать следующим образом:

1) выбрать в таблице истинности функции все наборы значений переменных, на которых функция равна 1;

2) для каждого такого набора записать конъюнкцию, в которую войдут все переменные, причем, если значение переменной на данном наборе равно 0, то она войдет в конъюнкцию со знаком отрицания, а если 1, то без знака отрицания;

3) записать дизъюнкцию всех выписанных в п. 2 конъюнкций.

Пример 5. Задать функцию в виде СДНФ:

а) $x_1 \to x_2$; б) $x_1 | x_2$;

в) $x_1 \downarrow x_2$; г) $f(x, y, z) = (11001010)$.

◄ а) - в) Зададим функции таблично (табл. 2.19) и выпишем для них СДНФ.

Таблица 2.19

x_1	x_2	$x_1 \to x_2$	$x_1 \mid x_2$	$x_1 \downarrow x_2$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	0
1	0	0	1	0
1	1	1	0	0

$x_1 \to x_2 = \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 x_2 \vee x_1 x_2$;

$x_1 | x_2 = \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 x_2 \vee x_1\bar{x}_2$;

$x_1 \downarrow x_2 = \bar{x}_1\bar{x}_2$.

г) Запишем СДНФ, воспользовавшись таблицей истинности функции $f(x, y, z) = (11001010)$ (см. табл. 2.18):

$$f = \bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z} \vee \bar{x}\,\bar{y}\,z \vee x\,\bar{y}\,\bar{z} \vee x\,y\,\bar{z}. \ ►$$

3. Задание функции совершенной конъюнктивной нормальной формой. Рассмотрим еще один способ задания функции формулой над множеством, состоящим из дизъюнкции, конъюнкции и отрицания.

Каждую булеву функцию f, не равную тождественно единице, можно задать формулой

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \bigwedge_{\substack{(\tau_1,...,\tau_n) \\ f(\tau_1,...,\tau_n)=0}} \left(x_1^{\overline{\tau_1}} \vee ... \vee x_n^{\overline{\tau_n}} \right)$$

(здесь конъюнкция берется по всевозможным наборам значений переменных $x_1, x_2, ..., x_n$, на которых функция f равна 0).

Эту формулу называют *совершенной конъюнктивной нормальной формой* (сокращенно СКНФ).

Доказательство этого утверждения приведено во второй части параграфа.

Чтобы записать СКНФ функции, нужно действовать следующим образом:

1) выбрать в таблице истинности функции все наборы значений переменных, на которых функция равна 0;

2) для каждого такого набора записать дизъюнкцию, в которую войдут все переменные, причем, если значение переменной на данном наборе равно 1, то она войдет в дизъюнкцию со знаком отрицания, а если 0, то без знака отрицания;

3) записать конъюнкцию всех выписанных в п. 2 дизъюнкций.

Пример 6. Задать функцию в виде СКНФ:

а) $x_1 \to x_2$; б) $x_1 | x_2$;

в) $x_1 \downarrow x_2$; г) $f(x, y, z) = (11001010)$.

◀ а) - г) Опираясь на таблицы истинности функций (см. табл. 2.19 и 2.18), запишем:

а) $x_1 \to x_2 = \overline{x}_1 \vee x_2$;

б) $x_1 | x_2 = \overline{x}_1 \vee \overline{x}_2$;

в) $x_1 \downarrow x_2 = (x_1 \vee \overline{x}_2)(\overline{x}_1 \vee x_2)(\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2)$;

г) $f = (x \vee \overline{y} \vee z)(x \vee \overline{y} \vee \overline{z})(\overline{x} \vee y \vee \overline{z})(\overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z})$. ▶

Каждая булева функция может быть задана формулой над множеством $B = \{\vee, \wedge, \neg\}$.

Действительно, если $f \equiv 0$, то f можно задать в виде СКНФ. Если $f \not\equiv 0$, то f можно задать в виде СДНФ.