Уважаемые студенты!

Задание:

- Изучить теорию;
- Написать краткий конспект;
- Разобрать примеры решения;
- Ответить на вопросы;
- По вопросам обращаться 072-1098278 или hvastov@rambler.ru
- Фотоотчёт конспекта прислать в течении 3 дней со дня получения задания на hvastov@rambler.ru

Лекция

Тема: Производная сложной функции. Производные высших порядков. Неопределенный интеграл, основные методы интегрирования. Определённый интеграл, основные методы интегрирования.

Цель: Повторить понятие интеграла, и вспомнить основные методы интегрирования. Обобщить и расширить, изученный ранее материал

План

1. Роль и место математики в современном мире при освоении профессиональных дисциплин и в сфере профессиональной деятельности.
2. Производная сложной функции
3. Производные высших порядков
4. Примеры решения типовых задач
5. Основные правила интегрирования.
6. Основные формулы интегрирования (табличные интегралы).
7. Метод непосредственного интегрирования.
8. Метод замены переменной (метод подстановки)
9. Понятие определённого интеграла.
10. Основные свойства определённого интеграла.
11. Метод непосредственного вычисления определённого интеграла.
12. Вычисление определенного интеграла методом подстановки.
13. Вычисление определенного интеграла методом интегрирования по частям.

> У каждого человека есть определенный кругозор. Когда этот кругозор сужается до бесконечности малого, то он обращается в точку. Тогда человек и говорит, что это есть его точка зрения.
>
> Д.Гильберт

1.Математика представляет собой одну из самых важных фундаментальных наук . Одной из характерных черт современного научно - технического прогресса является существенное расширение областей применения теоретической и вычислительной математики на базе широкого использования метода математического моделирования . Математические методы применяются не только в таких традиционных науках , как механика, астрономия, физика, но и в экономике , химии, социологии, медицине.

Большинство направлений научной и технической деятельности людей достигли высокого уровня развития и исчерпали возможности описательных методов исследования.

В связи с этим дальнейший успех возможен только на базе использования математического аппарата. Работникам народного хозяйства необходимо владеть основными математическими методами исследования и приёмами вычислений, устным, письменным и машинным счётом.

Цель изучения математики в средних специальных учебных заведениях состоит в том, чтобы углубить знания по изученным разделам и ознакомиться с новыми разделами математики, которые обогащают общую культуры, развивают логическое мышление и широко используются в математическом моделировании задач, с которыми встречается современный специалист в своей деятельности.

2.Рассмотрим функцию $F(x)=\log_2(x^2+1)$. Эту функцию можно рассматривать как сложную функцию $F(y)=\log_2 y$, где $y=g(x)=x^2+1$, т.е как функцию f(y), аргумент которой также является функцией y=g(x). Иными словами, сложная функция – это функция от функции F(x)=f(g (x)).Производная сложной функции находится по формуле F'(x)=f'(y)*g'(x) , где y=g(x) , т.е. по формуле (f(g(x)))' = f'(g(x))*g'(x).

Примеры:

1.Пусть $F(x)= (2x+1)^2 +5*(2x+1)$. Здесь $F(y)= y^2 +5y$, y=g(x)= 2x+1

F'(x) = (2y+5)*(2x+1)'= (2y+5)*2=(2*(2x+1)+5)*2=8x+14.

2.$F(x) = (x^2+1)^{\frac{3}{2}}$. Здесь $f(y)= y^{\frac{3}{2}}$, $y=g(x)= x^2+1$.

$F'(x) = \frac{3}{2}\ y^{\frac{1}{2}} * (x^2+1)' = \frac{3}{2}\ (x^2+1)^{\frac{1}{2}} * 2x = 3x * \sqrt{x^2+1}$

3. Пусть функция y = f(x) дифференцируемая во всей области её определения. Y'=f'(x) является производной. Производная от f'(x) называется второй производной или производной второго порядка и обозначается y''; f ''(x) ; $d^2y\ dx^2$

Производная от второй производной называется производной третьего порядка и обозначается y'''= (y'')' .

Производной n – го порядка называется производная от производной (n-1) порядка: $y=^{(n)} = (y^{(n-1)})^1$.

3. Примеры решения типовых задач

Пример 1

Найти производную функции $y=\sin(3x-5)$

Под синусом у нас находится не просто x, а целое выражение $3x-5$, поэтому найти производную сразу по таблице не получится. Также мы замечаем, что здесь невозможно применить первые четыре правила, вроде бы есть разность, но дело в том, что «разрывать на части» синус нельзя:
Функция $y=\sin(3x-5)$ – это сложная функция, причем многочлен $3x-5$ является вложенной функцией , а $\sin(3x-5)$ – внешней функцией.

Первый шаг, который нужно выполнить при нахождении производной сложной функции состоит в том, чтобы разобраться, какая функция является вложенной, а какая – внешней.

После того, как определены вложенная и внешняя функции применяют правило дифференцирования сложной функции $(u(v))'=u'(v)\cdot v'$.

Вычислим производную:

$y'=(\sin(3x-5))'$

Сначала находят производную внешней функции $u'(v)$, по формуле $(\sin x)'=\cos x$. Все табличные формулы применимы и в том, случае, если x заменить сложным выражением, в данном случае:
$u'(v)=\cos(3x-5)$

При выполнении вычислений вложенная функция $v=3x-5$ не изменилась.

По формуле $(u(v))'=u'(v)\cdot v'$ получаем:

$y'=(\sin(3x-5))'=\cos(3x-5)\cdot(3x-5)'=\cos(3x-5)\cdot(3-0)$

Постоянный множитель обычно выносят в начало выражения:
$y'=(\sin(3x-5))'=\cos(3x-5)\cdot(3x-5)'=\cos(3x-5)\cdot(3-0)=$
$=3\cos(3x-5)$

Пример 2

Найти производную функции $y=(2x+1)^5$

Запишем

$y' = ((2x+1)^5)'$

Определим где внешняя функция, а где вложенная. Для этого пробуем вычислить значение выражения $(2x+1)^5$ при $x=1$. Что нужно выполнить в первую очередь? В первую очередь нужно сосчитать чему равно основание: $2\cdot 1+1=3$, значит, многочлен $(2x+1)$ – и есть вложенная функция. И, только потом выполняется возведение в степень 3^5, следовательно, степенная функция – это внешняя функция.

По правилу дифференцирования сложной функции $(u(v))' = u'(v)\cdot v'$, сначала нужно найти производную от внешней функции, в данном случае, от степени. По формуле $(x^n)' = nx^{n-1}$ вычисляем производную:

$$y' = ((2x+1)^5)' = 5\cdot(2x+1)^4\cdot(2x+1)' =$$

$$= 5\cdot(2x+1)^4\cdot(2+0) = 10\cdot(2x+1)^4$$

Пример 3

Найти производную функции $y = \sqrt[3]{x^2+tgx+15}$

Для того чтобы продифференцировать корень, его нужно представить в виде степени $x^{\frac{a}{b}}$. Таким образом, сначала приводим функцию в надлежащий для дифференцирования вид:

$$y' = (\sqrt[3]{x^2+tgx+15})' = \left((x^2+tgx+15)^{\frac{1}{3}}\right)'$$

Анализируя функцию, приходим к выводу, что сумма трех слагаемых – это вложенная функция, а возведение в степень – внешняя функция.По правилу дифференцирования сложной функции $(u(v))' = u'(v)\cdot v'$:

$$y' = (\sqrt[3]{x^2+tgx+15})' = \left((x^2+tgx+15)^{\frac{1}{3}}\right)' =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot(x^2+tgx+15)^{-\frac{2}{3}}\cdot(x^2+tgx+15)'$$

Степень снова представляем в виде радикала , а для производной вложенной функции применяем простое правило дифференцирования суммы:

$$y' = (\sqrt[3]{x^2+tgx+15})' = \left((x^2+tgx+15)^{\frac{1}{3}}\right)' =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot(x^2+tgx+15)^{-\frac{2}{3}}\cdot(x^2+tgx+15)' =$$

$$= \frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{(x^2+tgx+15)^2}}\cdot((x^2)' + (tgx)' + (15)') =$$

$$= \frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{(x^2+tgx+15)^2}}\cdot\left(2x+\frac{1}{\cos^2 x}\right)$$

Пример 4

Найти производную функции $y = 7^{\arcsin^2 x}$

Разбираемся во вложениях этой функции. Пробуем вычислить выражение $7^{\arcsin^2 x}$ подставив значение $x=1$. Если использовать для вычислений калькулятор, то сначала нужно найти $\arcsin 1$, значит, арксинус – самое глубокое вложение.

$$7^{\arcsin^2 x}$$

Затем этот арксинус единицы следует возвести в квадрат $\arcsin^2 1$:

$$7^{\boxed{\arcsin^2 x}}$$

И, наконец, семерку возводим в степень $7^{\arcsin^2 1}$:

$$7^{\boxed{\arcsin^2 x}}$$

То есть, в данном примере у нас три разные функции и два вложения, при этом, самой вложенной функцией является арксинус, а самой внешней функцией – показательная функция.

По правилу $(u(v))' = u'(v)\cdot v'$ сначала нужно взять производную от внешней функции. Вычислим производную показательной функции: $(a^x)' = a^x \ln a$. Вместо x рассмотрим сложное выражение $\arcsin^2 x$, что не отменяет справедливость данной формулы. Итак, результат применения правила дифференцирования сложной функции $(u(v))' = u'(v)\cdot v'$ следующий:

$$y' = (7^{\arcsin^2 x})' = 7^{\arcsin^2 x}\cdot \ln 7 \cdot (\arcsin^2 x)'$$

Теперь опять необходимо вычислить производную сложной функции взяв за вложенную функцию – арксинус, а за внешнюю функцию – степень. Согласно правилу дифференцирования сложной функции сначала нужно взять производную от степени:

$$y' = (7^{\arcsin^2 x})' = 7^{\arcsin^2 x}\cdot \ln 7 \cdot (\arcsin^2 x)' =$$

$$= 7^{\arcsin^2 x}\cdot \ln 7 \cdot 2\arcsin^1 x \cdot (\arcsin x)'$$

Далее находим по таблице производную арксинуса:

$$y' = (7^{\arcsin^2 x})' = 7^{\arcsin^2 x}\cdot \ln 7 \cdot (\arcsin^2 x)' =$$

$$= 7^{\arcsin^2 x}\cdot \ln 7 \cdot 2\arcsin^1 x \cdot (\arcsin x)' =$$

$$= 7^{\arcsin^2 x}\cdot \ln 7 \cdot 2\arcsin x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \frac{2\ln 7 \cdot 7^{\arcsin^2 x}\cdot \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Пример 5

Найти производную функции $y = -2xe^{3x} + (x^2 - 4x + 3)\sin 7x$

$$y' = (-2xe^{3x} + (x^2 - 4x + 3)\sin 7x)'$$

Сначала используем правило дифференцирования суммы $(u \pm v)' = u' \pm v'$, заодно в первом слагаемом выносим постоянный множитель за знак производной по правилу $(Cu)' = Cu'$:

$$y' = (-2xe^{3x} + (x^2 - 4x + 3)\sin 7x)' = -2(xe^{3x})' + ((x^2 - 4x + 3)\sin 7x)'$$

Далее дважды необходимо применить правило $(uv)' = u'v + uv'$:

$$y' = (-2xe^{3x} + (x^2 - 4x + 3)\sin 7x)' = -2(xe^{3x})' + ((x^2 - 4x + 3)\sin 7x)' =$$

$$= -2((x)'e^{3x} + x(e^{3x})') + (x^2 - 4x + 3)'\sin 7x + (x^2 - 4x + 3)(\sin 7x)'$$

Согласно правилу $(u(v))' = u'(v)\cdot v'$, получаем:

$$y' = (-2xe^{3x} + (x^2-4x+3)\sin 7x)' = -2(xe^{3x})' + ((x^2-4x+3)\sin 7x)' =$$
$$= -2((x)'e^{3x} + x(e^{3x})') + (x^2-4x+3)'\sin 7x + (x^2-4x+3)(\sin 7x)' =$$
$$= -2(1\cdot e^{3x} + x\cdot e^{3x}\cdot(3x)') + (2x-4+0)\sin 7x + (x^2-4x+3)\cos 7x\cdot(7x)' =$$
$$= -2(e^{3x} + 3xe^{3x}) + (2x-4)\sin 7x + 7(x^2-4x+3)\cos 7x$$

Задания к лекции для самостоятельного решения:

Найти производную функции:

1) $y = \left(5x^2 - 3\sqrt[5]{x^2} - 2\right)^3$; 2) $y = \sin\ln 7x$; 3) $y = 5^{6x}\arcsin 5x$.

Механический смысл второй производной: ускорение a(t) прямолинейного движения материальной точки в момент времени t равно первой производной от скорости по времени или второй производной от пути по времени.

a(t) = U ’ (t) = S ’ ’(t).

Пример: Тело движется прямолинейно по закону $S= 1 - 2t + t^3$. Найти скорость и ускорение в момент времени t=3.

Решение:

$U(t)=S'(t) = (1-2t+t^3)' = -2 + 3t^2$

$A(t)= U'(t) = (-2 + 3t^2) = 6t$; a(3) = 6 *3 = 18

$U(3) = -2+3\cdot 3^3 = 25$.

5. Неопределенный интеграл и его свойства.

Определение 1. Функция F называется первообразной функции $f(x)$ на некотором промежутке X, если для любого $x \in X$ функция $F(x)$ дифференцируема и выполняется равенство: $F'(x) = f(x)$ Например, функция $F(x) = \frac{1}{5}x^5 + 2$ есть первообразной функции $f(x) = x^4$ на R, т.к. $\left(\frac{1}{5}x^5 + 2\right)' = x^4$ Определение 2. Совокупность всех первообразных функций для функции $f(x)$ на промежутке X называется неопределенным интегралом от функции $f(x)$ на этом промежутке и обозначается $\int f(x)dx$, т.е. $\int f(x)dx = F(x) + C$, где C – произвольная постоянная, функция f называется подинтегральной функцией, $f(x)dx$ – подинтегральным выражением. Операция нахождения неопределенного интеграла функции называется ее интегрированием. Переменная x называется переменной интегрирования.

Основные правила интегрирования.

Теорема1. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы функций равняется сумме неопределенных интегралов от этих функций:

$$\int [f_1(x) \pm f_2(x)]dx = \int f_1(x)\,dx \pm \int f_2(x)\,dx .$$

Теорема 2. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла, т.е. если $C = const$, то

$$\int Cf(x)\,dx = C\int f(x)\,dx .$$

2. Основные формулы интегрирования (табличные интегралы).

1. $\int 0dx = C, C - const$;
2. $\int dx = x + C$;

3. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, (n \neq -1)$;

4. $\int \frac{1}{x} dx = \int \frac{dx}{x} = \int x^{-1} dx = \ln|x| + C$;

5. $\int \frac{1}{x^n} dx = \int \frac{dx}{x^n} = \int x^{n-1} dx = -\frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{x^{n-1}} + C = -\frac{1}{(n-1) \cdot x^{n-1}} + C$;

6. $\int \frac{1}{x^2} dx = \int \frac{dx}{x^2} = \int x^{-2} dx = -\frac{1}{x} + C$;

7. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$;

8. $\int e^x dx = e^x + C$; 24. $\int e^{kx} dx = \frac{1}{k} e^{kx} + C$;

9. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$; 25. $\int a^{kx} dx = \frac{1}{k} \cdot \frac{a^{kx}}{\ln a} + C$;

10. $\int \sin x dx = -\cos x + C$; 26. $\int \sin kx dx = -\frac{1}{k} \cos kx + C$;

11. $\int \cos x dx = \sin x + C$; 27. $\int \cos kx dx = \frac{1}{k} \sin kx + C$;

12. $\int tgx dx = -\ln|\cos x| + C$;

13. $\int ctg dx = \ln|\sin x| + C$;

14. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$; 28. $\int \frac{dx}{\cos^2 kx} = \frac{1}{k} tgkx + C$;

15. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$; 29. $\int \frac{dx}{\sin^2 kx} = -\frac{1}{k} ctgkx + C$;

16. $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C$;

17. $\int \frac{dx}{1-x^2} = -arcctgx + C$;

18. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$;

19. $\int \frac{dx}{-\sqrt{1-x^2}} = \arccos x + C$;

20. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$;

21. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arcctg \frac{x}{a} + C$;

22. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$;

23. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$; 30. $\int \frac{dx}{\sin^2 kx} = -\frac{1}{k} ctgkx + C$.

7. Метод непосредственного интегрирования.

Непосредственное интегрирование основано на прямом использовании таблицы интегралов. Здесь могут представиться следующие случаи:

1) данный интеграл находится непосредственно по соответствующему табличному интегралу;

2) данный интеграл после применения свойств непосредственного интеграла приводится к одному или нескольким табличным интегралам;

3) данный интеграл после элементарных тождественных преобразований над подынтегральной функцией и применяя свойства неопределенного интеграла приводится к одному или нескольким табличным интегралам.

Пример 1. Найти интеграл $\int(5x\sqrt{x}+3e^{x}+7\cos x)dx$.

$$\int(5x\sqrt{x}+3e^{x}+7\cos x)dx=5\int x^{\frac{3}{2}}dx+3\int e^{x}dx+7\int\cos xdx$$

$$=5\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}+3e^{x}+7\sin x+C=2x^{2}\sqrt{x}+3e^{x}+7\sin x+C.$$

Пример 2. $\int\frac{\cos^{2}x+\sin 2x-\sqrt{2}\cos x}{\cos x}\,dx=\int\cos x\,dx+2\int\sin x\,dx-\sqrt{2}\int dx$

$=\sin x-2\cos x-\sqrt{2}x+C$.

Пример 3. $\int\left(e^{4x}+\frac{3}{7}\sin 7x+7x-\frac{5}{\sin^{2}x}-6+x^{5}\right)dx=\frac{1}{4}e^{4x}+\frac{3}{7}\sin 7x+\frac{7x}{\ln 7}+5\operatorname{ctg}x-6x+\frac{x^{6}}{6}+C$.

4. Метод замены переменной (метод подстановки).

Замена переменной интегрирования является одним из самых эффективных приемов сведения неопределенного интеграла к табличному.

Пример 4. Найти интеграл $\int x\sqrt{x-3}\,dx$.

Решение. Пусть $\sqrt{x-3}=t$, тогда $x-3=t^{2}\Rightarrow x=3+t^{2}$, $dx=2t\,dt$.

$$\int x\sqrt{x-3}\,dx=\int(t^{2}+3)\cdot t\cdot 2t\cdot dt=2\int(t^{4}+3t^{2})\,dt=$$

$$=2\int t^{4}dt+6\int t^{2}dt=\frac{2}{5}t^{5}+\frac{6}{3}t^{3}+C=\frac{2}{5}\sqrt{(x-3)^{5}}+2\sqrt{(x-3)^{3}}+C.$$

Пример 5. Найти интеграл $\int e^{x^{2}}xdx$.

Решение. Выполним подстановку $u=x^{2}$, тогда $u'=2x$, и, согласно формуле (2), имеем

$$\int e^{x^{2}}xdx=\frac{1}{2}\int e^{x^{2}}d(x^{2})=\frac{1}{2}\int e^{u}d(u)\Big|_{u=x^{2}}=\left(\frac{1}{2}e^{x^{2}}+C\right)\Big|=\frac{1}{2}e^{x^{2}}+C$$

Пример 6. Найти интеграл $\int\sqrt{\sin x}\cos xdx$.

Решение. Сделаем подстановку $t=\sin x$; тогда $dt=\cos xdx$.

$$\int\sqrt{\sin x}\cos xdx=\int\sqrt{t}\,dt=\int t^{\frac{1}{2}}dt=\frac{2t^{\frac{3}{2}}}{3}+C=\frac{2}{3}\sin^{\frac{3}{2}}x+C.$$

8. Метод интегрирования по частям.

Формула $\int u d\upsilon=u\upsilon-\int\upsilon du$ называется формулой интегрирования по частям в неопределенном интеграле.

Классы функций, которые интегрируются по частям.

I. В интегралах вида

$$\int P(x)e^{kx}\,dx,\quad\int P(x)a^{kx}\,dx,\quad\int P(x)\sin kx\,dx,\quad\int P(x)\cos kx\,dx,$$

где $P(x)$ – многочлен, k – число, целесообразно обозначить $u=P(x)$, а оставшуюся часть подынтегрального выражения – $d\upsilon$.

$$
\begin{array}{l|c|c}
\int & P(x) & e^{kx}dx \\
\int & P(x) & \sin kx\,dx \\
\int & P(x) & \cos kx\,dx \\
\int & P(x) & a^{kx}\,dx \\
\hline
 & u & d\upsilon
\end{array}
$$

Пример 7.\ $\int (2x+3)\sin 4x\,dx = \begin{bmatrix} u = 2x+3; & du = 2dx \\ d\upsilon = \sin 4x\,dx; & \upsilon = -\dfrac{1}{4}\cos 4x \end{bmatrix} =$

$= -\dfrac{1}{4}(2x+3)\cos 4x + \dfrac{1}{2}\int \cos 4x\,dx = -\dfrac{1}{4}(2x+3)\cos 4x + \dfrac{1}{8}\sin 4x + C$

Пример 8. \ $\int x\cdot 3^{7x-1}dx = \begin{bmatrix} u = x; & du = dx \\ d\upsilon = 3^{7x-1}dx; & \upsilon = \dfrac{1}{7\ln 3}\cdot 3^{7x-1} \end{bmatrix} =$

$= \dfrac{1}{7\ln 3}\cdot x\cdot 3^{7x-1} - \dfrac{1}{7\ln 3}\int 3^{7x-1}dx = \dfrac{1}{7\ln 3}\cdot x\cdot 3^{7x-1} - \dfrac{1}{49\ln^2 3}\cdot 3^{7x-1} + C$.

II. В интегралах вида

$$\int P(x)\ln x\,dx\ ,\ \int P(x)\arcsin x\,dx\ ,\ \int P(x)\arccos x\,dx\ ,\ \int P(x)\,\mathrm{arctg}\,x\,dx\ ,\ \int P(x)\,\mathrm{arcctg}\,x\,dx$$

целесообразно обозначить $d\upsilon = P(x)dx$, а оставшуюся часть подинтегрального выражения – u .

$$
\begin{array}{l|c|c|c}
\int & P(x) & \arcsin x & dx \\
\int & P(x) & \arccos x & dx \\
\int & P(x) & \mathrm{arctg}\,x & dx \\
\int & P(x) & \mathrm{arcctg}\,x & dx \\
\int & P(x) & \ln x & dx \\
\hline
 & & u & \\
\end{array}
$$

$d\upsilon$

Пример9. $\int x^5\ln x\,dx = \begin{bmatrix} u = \ln x; & du = \dfrac{1}{x}dx \\ d\upsilon = x^5dx; & \upsilon = \dfrac{x^6}{6} \end{bmatrix} = \dfrac{x^6}{6}\ln x - \dfrac{1}{36}x^6 + C$

Пример10. $\int \arcsin 2x\,dx = \begin{bmatrix} u = \arcsin 2x; & du = \dfrac{2}{\sqrt{1-4x^2}}dx \\ d\upsilon = dx; & \upsilon = x \end{bmatrix} =$

$= x\cdot\arcsin 2x - \int \dfrac{2x}{\sqrt{1-4x^2}}dx = x\cdot\arcsin 2x + \dfrac{1}{2}\sqrt{1-4x^2} + C$

Упражнения для самостоятельной работы.

Вычислить неопределенный интеграл:

1). $\int \dfrac{x^3\cos^2 x + \sqrt{\pi} - 5^x\cos^2 x}{\cos^2 x}dx$ $\left[\dfrac{x^4}{4} + \sqrt{\pi}\,\mathrm{tg}\,x - \dfrac{5^x}{\ln 5} + C\right]$

2). $\int\left(\sqrt[5]{x} - \dfrac{1}{\sqrt[5]{x}}\right)dx$ $\left[\dfrac{5\cdot\sqrt[5]{x^6}}{6} - \dfrac{5\cdot\sqrt[5]{x^4}}{4} + C\right]$ 3) $\int\left(x\sqrt[3]{x} + \dfrac{x}{\sqrt{x^3}}\right)dx$ $\left[\dfrac{3\cdot\sqrt[3]{x^7}}{7} + \dfrac{2x^2}{\sqrt{x^2}} + C\right]$

4) $\int\left(\dfrac{x^2e^x - x^3 + x^2}{x^2}\right)dx$ $\left[e^x - \dfrac{x^2}{2} + x + C\right]$ 5) $\int \dfrac{x^4 - 3x^3 + 4x^2 + 6x - 8}{x^2}dx$ $\left[\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{3}{2}x^2 + 4x + 6\ln x + \dfrac{8}{x} + C\right]$

Вычислить неопределенный интеграл методом подстановки:

6) $\int\sqrt{2x-3}\,dx$ $\left[\dfrac{1}{3}(2x-3)^{\frac{3}{2}} + C\right]$ 7) $\int\dfrac{x}{\sqrt{x+4}}dx$ $\left[\dfrac{2}{3}\sqrt{x+4}\cdot(x-8) + C\right]$

8) $\int \sin^3 x\cos x\,dx$ $\left[\frac{\sin^4 x}{4}+C\right]$ 9) $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}dx$ $\left[\frac{1}{\cos x}+C\right]$

Найти неопределенный интеграл методом интегрирования по частям:

10). $\int (4x+5)\sin 3x\,dx$ $\left[-\frac{1}{3}\cos 3x(4x+5)+\frac{4}{9}\sin 3x+C\right]$

11). $\int (3x+2)\cos 5x\,dx$ $\left[\frac{1}{5}\sin 5x(3x+2)+\frac{3}{25}\cos 5x+C\right]$

12). $\int x\ln x\,dx$ $\left[\frac{1}{2}x^2\left(\ln x-\frac{1}{2}\right)+C\right]$

13). $\int x\sin x\,dx$ $[\sin x - x\cos x + C]$

14). $\int x\,\mathrm{arctg}\,x\,dx$ $\left[\frac{1}{2}\left((x^2+1)\,\mathrm{arctg}\,x-x\right)+C\right]$

1.Понятие определённого интеграла.

Рассмотрим функцию $f(x)$, определенную на промежутке $a \le x \le b$. Разобьем этот отрезок на n частей точками $a = x_0 < x_1 < x_{21} < x_3 \ldots < x_n =$ b. Выберем на каждом из полученных частичных отрезков $[x_{i-1}; x_i]$, $i = 1,2,3,...,n$ произвольным образом точку и обозначим их c_i, а длину отрезков через Δx_i и составим сумму:

$f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + ... + f(c_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_1)\Delta x_1$, которая называется интегральной суммой функции $f(x)$.Очевидно эта сумма зависит от того как разбит отрезок $[a;b]$ и от того как выбраны точки c_i .Определенным интегралом от функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ называется предел интегральной суммы при условии, что длина наибольшего из элементарных отрезков стремиться к нулю:

$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x_i \to 0}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$,где число a называется нижним пределом интегрирования, число b называется верхним пределом интегрирования, отрезок $[a;b]$ - отрезком интегрирования.

Для любой функции $f(x)$ непрерывной на отрезке $[a;b]$, всегда существует определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$.

2.Основные свойства определённого интеграла.

Все свойства сформулированы в предложении, что рассматриваемые функции интегрируемы в соответствующих отрезках.

1. Определенный интеграл с одинаковыми пределами равен нулю:

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

2. При перестановке пределов интегрирования знак интеграла меняется на противоположный:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

3. Отрезок интегрирования можно разбивать на части:

$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$, где a < c < b.

4. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:

$$\int_a^b Cf(x)dx = C\int_a^b f(x)dx.$$

5. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы функций равен такой же алгебраической сумме неопределенных интегралов от каждой функции:

$$\int (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx.$$

3.Метод непосредственного вычисления определённого интеграла.

Для вычисления определенного интеграла, когда можно найти соответствующий неопределенный интеграл, служит формула Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = \int f(x)dx \,\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

т.е. определенный интеграл равен разности значений любой первообразной функции при верхнем и нижнем пределах интегрирования.

Из этой формулы виден порядок вычисления определенного интеграла:

1) Найти неопределенный интеграл от данной функции:

2) В полученную первообразную подставить вместо аргумента сначала верхний, затем нижний предел интеграла;

3) Из результата подстановки верхнего предела вычесть результат подстановки нижнего предела.

ПРИМЕР 1. Вычислить интеграл $\int_{-\frac{1}{2}}^{4} xdx$.

Решение: Применив указанное правило, вычислим данный интеграл:

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{4} xdx = \frac{x^2}{2}\Big|_{-\frac{1}{2}}^{4} = \frac{1}{2}x^2\Big|_{-\frac{1}{2}}^{4} = \frac{1}{2}\left(4^2 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2\right) = \frac{1}{2}\left(16 - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{63}{4} = \frac{63}{8} = 7\frac{7}{8}.$$

ПРИМЕР 2. Вычислить интеграл $\int_1^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$.

Решение: Воспользуемся определением степени с дробным и отрицательным показателем и вычислим определенный интеграл:

$$\int_1^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = \int_1^8 x^{-\frac{2}{3}}dx = \frac{x^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}}\Big|_1^8 = 3\sqrt[3]{x}\,\Big|_1^8 = 3\left(\sqrt[3]{8} - \sqrt[3]{1}\right) = 3(2-1) = 3.$$

ПРИМЕР 3. Вычислить интеграл $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \sin x\right)dx$.

Решение:

Интеграл от разности функций заменим разностью интегралов от каждой функции:

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \sin x\right)dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x} - \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin x dx = tgx\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} + \cos x\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = tg\frac{\pi}{4} - tg\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\frac{\pi}{4} - \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 1 - (-1) + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = 2$$

Пример 4. Вычислить интеграл $\int_{-1}^{3} 3x^4\,dx$.

Решение. $\int_{-1}^{3} 3x^4\,dx = \frac{3x^5}{5}\Big|_{-1}^{3} = \frac{3\cdot 243}{5} + \frac{3}{5} = \frac{729}{5} + \frac{3}{5} = \frac{732}{5}$.

Пример 5. Вычислить интеграл: $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{2\,dx}{1+x^2} = 2\,\mathrm{arctg}\,x\Big|_0^{\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{3} - 0 = \frac{2\pi}{3}$.

4.Вычисление определенного интеграла методом подстановки.

Вычисление определенного интеграла методом подстановки состоит в следующем:

1) Часть подынтегральной функции надо заменить новой переменной;
2) Найти новые пределы интегрирования;
3) Найти дифференциал от обеих частей замены;
4) Все подынтегральное выражение выразить через новую переменную (после чего должен получиться табличный интеграл);
5) Вычислить полученный определенный интеграл.

ПРИМЕР 6. Вычислить интеграл $\int\limits_0^7 \frac{dx}{\sqrt[3]{8-x}}$.

Решение:

Введем новую подстановку 8-х=t, тогда $-dx = dt, dx = -dt$. Определим новые пределы интегрирования для переменной t. при х=0 получаем $t_н = 8-0 = 8$, при х=7 получаем $t_в = 8-7 = 1$. выразив подынтегральное выражение через t и dt и прейдя к новым пределам, получим:

$$\int\limits_0^7 \frac{dx}{\sqrt[3]{8-x}} = \int\limits_0^1 \frac{-dt}{\sqrt[3]{t}} = -\int\limits_8^1 t^{-\frac{1}{3}}dt = \int\limits_1^8 t^{-\frac{1}{3}}dt = \frac{t^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}\Big|_1^8 = \frac{3}{2}\sqrt[3]{t^2}\Big|_1^8 = \frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{64}-1\right) = \frac{3}{2}(4-1) = \frac{3}{2}\cdot 3 = \frac{9}{2} = 4{,}5.$$

ПРИМЕР 7. Вычислить интеграл $\int\limits_1^2 \frac{x^2dx}{\left(x^3+2\right)^2}$.

Решение:

Введем новую подстановку $x^3+2=t$, тогда $3x^2dx = dt, x^2dx = \frac{1}{3}dt$. Определим новые пределы интегрирования для переменной t. при х=1 получаем $t_н = 1^3+2 = 3$, при х=2 получаем $t_в = 2^3+2 = 10$. выразив подынтегральное выражение через t и dt и прейдя к новым пределам, получим:

$$\int\limits_1^2 \frac{x^2dx}{\left(x^3+2\right)^2} = \int\limits_3^{10} \frac{\frac{1}{3}dt}{t^3} = \frac{1}{3}\int\limits_3^{10} t^{-2}dt = \frac{1}{3}\cdot\frac{t^{-1}}{-1}\Big|_3^{10} = -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{t}\Big|_3^{10} = -\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3}\left(-\frac{7}{30}\right) = \frac{7}{90}.$$

5.Вычисление определенного интеграла методом интегрирования по частям.

Теорема. Пусть функции $u(x)$ и $\upsilon(x)$ непрерывны вместе со своими производными $u'(x)$ и $\upsilon'(x)$ на отрезке $[a;b]$, тогда справедлива формула:

$$\int\limits_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b v\,du.$$ - формула интегрирования по частям в определенном интеграле.

Пример 8. Вычислить интеграл $\int\limits_0^1 xe^x\,dx$.

Решение. Примем здесь $u = x$ и $\upsilon = e^x$ (тогда $d\upsilon = e^x\,dx$, $du = dx$).

$$\int\limits_0^1 xe^x dx = xe^x\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 e^x\,dx = e - e^x\Big|_0^1 = e-(e-1) = 1.$$

Пример 9. Вычислить интеграл $\int\limits_0^1 (2x+1)e^{2x}\,dx$.

Решение. Положим $u = 2x+1,\ d\upsilon = e^{2x}\,dx$, тогда

$du = 2dx,\ \upsilon = \frac{e^{2x}}{2}$.

$$\int_0^1 (2x+1)e^{2x}\,dx = \frac{2x+1}{2}e^{2x}\Big|_0^1 - \int_0^1 e^{2x}\,dx = \frac{3}{2}e^2 - \frac{1}{2} - \frac{e^{2x}}{2}\Big|_0^1 = e^2 .$$

Упражнения для самостоятельной работы.

Вычислить интегралы методом непосредственного интегрирования:

1. $\int_1^4 \frac{dx}{3x-2}$ 2. $\int_0^2 3^x\,dx$ 3. $\int (1+2x+3x^2)dx$

4. $\int_2^9 \sqrt[3]{x-1}dx$ 5. $\int_1^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$ 6. $\int_0^1 (\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2})dx$

7. $\int_1^8 \frac{2+5\sqrt[3]{x}}{x^3}$ 8. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^2 x}$ 9. $\int_{\frac{1}{e}}^{e} \frac{dx}{x}$

10. $\int_{-1}^1 \frac{2^x-3^x}{6^x}dx$ 11. $\int \frac{e^x+e^{-1}}{e^{x-1}}dx$ 12. $\int_{-2}^{-1} (x+\frac{1}{3x^5}+\frac{1}{2})dx$

13. $\int_0^1 (e^x+x)dx$ 14. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sqrt{2}\cos x+\sin x)dx$ 15. $\int_1^2 \frac{1+x^7}{x^6}dx$

16. $\int_1^{16} (\sqrt{x}-2)dx$ 17. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{2\cos^2 x}$

Вычислить интегралы методом подстановки:

1. $\int_0^1 (e^x-1)^4 e^x dx$ 2. $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x}$ 3. $\int_0^{\frac{\pi}{8}} \cos(2x+\frac{\pi}{4})dx$

4. $\int_4^5 \frac{dx}{(x-3)^2}$ 5. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\frac{x}{2}dx$ 6. $\int_0^{\sqrt{3}} x\sqrt{25-3x^2}dx$

7. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{\sqrt[3]{8-7\sin x}}$ 8. $\int_0 (5-2x^3)^3 x^2 dx$ 9. $\int_1^2 \frac{xdx}{(2x^2+4)^4}$

10. $\int_0^4 x\sqrt{x^2+9}dx$ 11. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} (3-2\sin x)^3\cos x dx$ 12. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{2\sin x+1}$

13. $\int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{x^4+16}\cdot x^3 dx$ 14. $\int_0^1 (2-x^3)^4 x^2 dx$ 15. $\int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{7x^3+1}}$

16. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x dx}{(1+2\cos x)^4}$ 17. $\int_0^2 \frac{x^2 dx}{\sqrt{9+2x^3}}$

Вычислить интегралы интегрированием по частям:

1. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx$ $[0]$ 2. $\int_0^1 (2x+1)e^{2x}\,dx$ $[e^2]$

3. $\int_1^2 (3x^2-5x+7)\,dx$ $\left[\frac{13}{2}\right]$ 4. $\int_e^{e^2} \frac{\ln t}{t}dt$ $\left[\frac{3}{2}\right]$

Контрольные вопросы.

1. Что такое производная ?
2. Как найти производную сложной функции?
3. В чём заключается механический смысл второй производной?
4. Дать определение производной n-го порядка
5. Какая функция называется первообразной?
6. Дайте определение неопределенного интеграла.
7. Сформулируйте основные правила интегрирования.
8. Воспроизведите таблицу интегралов.
9. В чем заключается метод непосредственного интегрирования?
10. Приведите пример вычисления интеграла методом подстановки.
11. Как вычислить интеграл, используя метод интегрирования по частям?
12. Что такое определенный интеграл?
13. Перечислите основные свойства определенного интеграла?
14. Напишите основные формулы интегрирования (табличные интегралы).
15. Что понимают под непосредственным интегрированием определенного интеграла?
16. Какие методы интегрирования в определенном интеграле вам известны?

Литература.

1. Яковлев Г.Н. Алгебра и начала анализа. Часть 1. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 2006.
2. Яковлев Г.Н. Алгебра и начала анализа. Часть 2. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 2007.
3. Богомолов М.В. Практические занятия по математике. - М.: Высшая школа, 1993.