**Задание:**

- Изучить теорию;
- Написать краткий конспект
- Разобрать примеры решения;
- По вопросам обращаться 072-1098278 или hvastov@rambler.ru
- Фотоотчёт конспекта прислать в течение 3 дней со дня получения задания на hvastov@rambler.ru

**Тема**: Основные понятия и методы теории вероятностей и математической статистики. Числовые множества. Элементы комбинаторики. Теория вероятности.
**Цель**: знакомство с определением случайных событий и операций над ними, формирование представлений об основных понятиях комбинаторики.

**План лекции**

1. Теория вероятностей.
2. Множества.
3. Действия над множествами.
4. Элементы комбинаторики.
5. Рассмотрим примеры.
6. Различные определения вероятности событий.
7. Отношения между событиями.
8. Операции над событиями.
9. Классическое определение вероятности.
10. Основные свойства вероятности.
11. Теорема сложения.
12. Условная вероятность.
13. Теорема умножения.
14. Формула полной вероятности.

Возникновение теории вероятностей относится к середине XVII в. и связано с именами Гюйгенса, Паскаля, Ферма и Якова Бернулли. В переписке Паскаля и Ферма, вызванной задачами, связанными с азартными играми, определились постепенно такие важные понятия, как вероятность и математическое ожидание. При этом, конечно, нужно отдавать себе ясный отчет, что выдающиеся ученые, занимаясь задачами азартных игр, предвидели и фундаментальную роль науки, изучающей случайные явления.

Следующий этап в развитии теории вероятностей связан с именем Якова Бернулли. Его теорема - закон больших чисел - первое теоретическое обоснование накопленных фактов.

Дальнейшими успехами теория вероятностей обязана Муавру, Лапласу, Гауссу, Пуассону, им принадлежит развитие первых аналитических методов теории вероятностей.

Новый, наиболее плодотворный период связан с именами Чебышева и его учеников - Маркова и Ляпунова. Этот период становления теории вероятностей стал началом раздела математики.

Дальнейшее развитие теории вероятностей связано с именами советских математиков: Колмогорова, Хинчина, Гнеденко и др. В настоящее время роль теории вероятностей неоспорима.

## Числовые множества

Под ***множеством*** понимается любая (конечная или бесконечная) совокупность объектов с некоторой общей характеристикой (или, что то же самое - объектов одинаковой природы). Эти объекты, как вам известно еще со школы, называются элементами множества. Множества с конечным числом различных элементов могут быть описаны путем явного перечисления всех этих элементов: обычно, эти элементы заключаются в фигурные скобки. Например, $\{1,2,4,8\}$- множество степеней двойки, заключенных между 1 и 10. Как правило, множество обозначается прописной буквой какого - либо алфавита, а его элементы - строчными буквами того же или другого алфавита. Для некоторых особо важных множеств приняты стандартные обозначения, которых стоит придерживаться. Так, буквами

N - множество натуральных чисел

Z - множество целых чисел

Q - множество рациональных чисел

R - множество вещественных (или действительных) чисел

При заданном множестве ***S*** включение $a \in S$ указывает на то, что ***a*** - элемент множества ***S***; в противном случае, как вы знаете, пишут $a \notin S$ (или $a \overline{\in} S$).

Множество можно описать, указав свойство, присущее только элементам именно этого множества. Множество всех объектов, обладающих свойством $H(x)$, обозначают через $\{x \mid H(x)\}$. Например: $S = \{n \in Z \mid n = 2k, \forall k \in Z\}$- множество всех четных чисел; $N = \{n \in Z \mid n > 0\}$- множество натуральных чисел.

Множество, не содержащее элементов, называется пустым и его принято обозначать символом Æ.

Говорят, что ***S*** – подмножество множества $T$ или $S \subset T$ ($S$ содержится в $T$), если все элементы множества $S$ являются также элементами множества $T$, то есть

$(S \subset T) \Leftrightarrow (\forall x \in S \Rightarrow x \in T)$.

Два множества $S$ и $T$ совпадают (или равны), если у них одни и те же элементы. Символически это выглядит так:

$(S = T) \Leftrightarrow (S \subset T$ и $T \subset S)$.

Заметим, что пустое множество Æ (т.е. множество совсем не содержащее элементов) по определению входит в число подмножеств любого множества.

Если $S \subset T$, но $S \neq$ Æи $S \neq T$, то $S$- называется собственным подмножеством в $T$. Для выделения подмножества $S \subset T$ часто используют какое - либо свойство, присущее только элементам из $S$.

Для множеств $A, B, C$ справедливы следующие соотношения:

$A \subset A$

$A \subset B \wedge B \subset C \Rightarrow A \subset C$

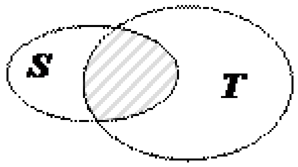
( значок $\wedge$ - это значок конъюнкции, т. е. логическое «и»).

Конечное множество называется ***упорядоченным***, если каждому элементу этого множества поставлено в соответствие некоторое число (номер элемента) от 1 до $n$.

## Операции над множествами.

Для пояснения некоторых определений и свойств операций над множествами и различных соотношений между ними воспользуемся диаграммами Эйлера – Венна, на которых множества, подлежащие рассмотрению, изображаются в виде совокупности точек на плоскости.

1. Под ***пересечением*** (*произведение*) двух множеств $S$ и $T$ понимается множество:

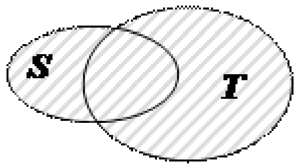


$S \cap T = \{x \mid x \in S \wedge x \in T\}$

Например:

$\{a, b, c\} \cap \{b, c\} = \{b, c\}$

2. Под ***объединением*** (*сумма*) двух множеств $S$ и $T$ понимается множество :



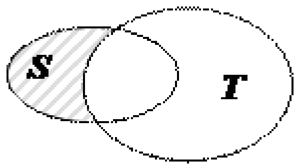
$S \cup T = \{x \mid x \in S \vee x \in T\}$

($\vee$ - значок дизъюнкции, логическое «или»)

Например:

$\{a, b, c\} \cup \{b, c, d\} = \{a, b, c, d\}$

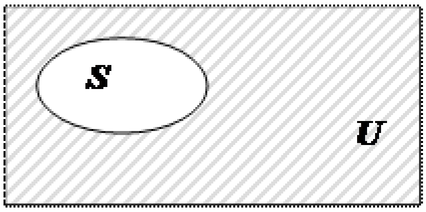
3. ***Разностью*** $S \setminus T$ множеств $S$ и $T$ называется совокупность тех элементов, из $S$, которые не содержатся в $T$, то есть



$S \setminus T = \{x \mid x \in S \wedge x \notin T\}$

Порядок множеств при выполнении этой операции существенен.

4. Если $S \subset U$ (здесь $U$ – основное , универсальное множество) то $\overline{S} = U \setminus S$



будем называть ***дополнением*** множества $S$ относительно $U$ (обозначается также: $C_U S$).

Можно еще много говорить о множествах, их свойствах, операциях над ними и т.п. Остановлюсь лишь на некоторых свойствах, указанных операций, после чего перейдем к новому разделу. Итак, для множеств $A, B, C$ справедливы следующие соотношения:

1. Свойство коммутативности: $A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A$;
2. Свойство дистрибутивности: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$; $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
3. Свойство ассоциативности: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$; $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
4. $A \cup A = A \cap A = A$; $A \cup \varnothing = A; \quad A \cap \varnothing = \varnothing$;
5. $A \cup (A \cap B) = A; \quad A \cap (A \cup B) = A$;
6. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}; \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;
7. $A \cup \overline{A} = U; \quad A \cap \overline{A} = \varnothing$;
8. $A \cup U = U; \quad A \cap U = A$ и т.д.

## Элементы комбинаторики

Комбинаторика - это раздел математики, изучающий задачи о расположении или выборе элементов из множеств.

Группы, составленные из каких - либо предметов (любой, но одинаковой природы: буквы, числа, геометрические фигуры, детали и т. д.) называются *соединениями* (множествами). Сами предметы, их которых составляются соединения, называются *элементами*.

Различают три основных типа соединений: размещения, перестановки и сочетания.

***размещениями*** из $n$ различных элементов по $k$ ($k \le n$) в каждом называются такие соединения, из которых каждое содержит $k$ элементов, взятых из числа данных $n$ элементов, и которые (соединения) отличаются друг от друга либо хотя бы одним элементом, либо порядком их расположения. Число размещений обозначается $A_n^k$ и вычисляется по формуле:

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\ldots(n-(k-1)).$$

такие размещения называются размещениями без повторений.

**ПРИМЕР**. В группе 25 студентов. Выбирают старосту, физорга и профорга. Каково число всех возможных вариантов выбора «треугольника» группы?

**Решение**. Получаемые комбинации (т.е. соединения) из 25 - и элементов по 3 в каждом являются размещениями, так как в них важен не только состав элементов «треугольника», но и расположение внутри него. Следовательно

$$A_{25}^3 = 25 \cdot 24 \cdot 23 = 1380.$$

***Размещение с повторениями*** из $n$ элементов по $k$ элементов в каждом может содержать любой элемент сколько угодно раз от 1 до $k$ включительно, либо не содержать его вовсе. Другими словами, каждое размещение с повторениями из $n$ элементов по $k$ может состоять не только из $k$ каких угодно, но и как угодно повторяющихся элементов. Число размещений с повторениями вычисляется по формуле

$$\left(A_n^k\right)_{\text{с повт.}} = n^k.$$

Пример 1. Известно, что 4 студента сдали экзамен. Сколько возможно различных исходов экзамена (распределений оценок)?

***Решение***. Число элементов $n$ =3 ( «3», «4», «5» ); $k = 4$. Последовательность, т. е. порядок элементов, существенна, повторения неизбежны.

Следовательно $\left(A_3^4\right)_{\text{с повт.}} = 3^4 = 81$.

**ПРИМЕР 2**. Сколькими способами 10 пассажиров могут распределиться по 13 вагонам, если для каждого существенным является только № вагона, а не занимаемое место в нем?

***Решение***. Пусть $x_1$ - номер вагона, выбранного первым пассажиром, $x_2$ - номер вагона, выбранного вторым пассажиром, . . . , $x_{10}$ - номер вагона, выбранного десятым пассажиром. Соединение (комбинация) $\{x_1, x_2, \dots, x_{10}\}$ полностью характеризует распределение пассажиров по вагонам. Здесь каждое из чисел $x_i \ (i = 1,2,\dots,10)$ может принимать любое целое значение от 1 до 13. Значит, различных распределений по вагонам будет столько, сколько подобных соединений (длиной 10) можно составить из элементов множества $X = \{1,2,\dots,13\}$.

Следовательно $\left(A_{13}^{10}\right)_{\text{с повт.}} = 13^{10}$.

***Перестановками*** из $n$ <u>различных</u> элементов называются такие соединения, из которых каждое содержит все $n$ элементов и которые <u>отличаются друг от друга лишь порядком расположения элементов.</u> Число таких перестановок из $n$ <u>различных</u> элементов обозначается $P_n$

$$P_n = n!.$$

Так как число перестановок из $n$ элементов - это то же самое, что и число размещений из $n$ элементов по $n$ в каждом, то можем записать:

$$P_n = A_n^n = n(n-1)\dots 1 = n!.$$

**ПРИМЕР**. Для проведения испытаний выбрано 5 различных моделей автомобилей. Сколькими способами они могут быть распределены между пятью испытателями?

***Решение***. Число способов, которыми можно распределить 5 автомобилей, равно числу комбинаций из 5 элементов по пять. Причем, сами комбинации отличаются друг от друга только порядком элементов, т.е. применимы перестановки.

Следовательно $P_5 = 5! = 120$.

Если же среди ***n*** элементов имеются одинаковые, то такие перестановки называются ***перестановками с повторениями***. Пусть имеется $n$ элементов, среди которых $n_1$ одинаковых $(n_1 \le n)$, тогда число перестановок с повторениями определяется по формуле

$$(P_n)_{с\ повт.} = \frac{n!}{n_1!}.$$

Если из $n$ элементов имеется две различные группы, состоящие соответственно из одинаковых элементов:

$$\underbrace{a, a, \ldots, a}_{n_1}, \underbrace{b, b, \ldots, b}_{n_2}, \underbrace{c, \ldots, s, t}_{n-n_1-n_2},$$

тогда

$$(P_n)_{с\ повт.} = \frac{n!}{n_1!\, n_2!}.$$

**ПРИМЕР**. Каким числом способов можно распределить 9 цитрусовых между 9 студентами, если имеются 4 мандарина, 3 апельсина и 2 лимона?

**Решение**. Пусть $m$ - мандарины, $a$ - апельсины и $l$ - лимоны. Тогда

$$\left\{ \underbrace{m, m, m, m}_{4}, \underbrace{a, a, a}_{3}, \underbrace{l, l}_{2} \right\}.$$

Следовательно $(P_9)_{с\ повт.} = \dfrac{9!}{4!\, 3!\, 2!} = 1260$.

***Сочетаниями*** из $n$ <u>различных</u> элементов по $k$ ($k \le n$) в каждом называются такие соединения, из которых каждое содержит $k$ элементов, взятых из числа данных $n$ элементов, и которые <u>отличаются друг от друга, по крайней мере, одним элементом</u>. Число сочетаний из $n$ <u>различных</u> элементов по $k$ в каждом обозначают символом $C_n^k$ и вычисляют по формуле:

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n(n-1)\ldots(n-(k-1))}{k!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Уверены, вы отлично понимаете, что это определение является определением числа сочетаний без повторений.

Число сочетаний обладает следующими **свойствами**:

1. $C_n^k = C_n^{n-k}$.

Этим свойством удобно пользоваться в случаях, когда $k > \frac{n}{2}$.

Например: $\left( \dfrac{25!}{23!\, 2!} = C_{25}^{23} \right) = \left( C_{25}^{2} = \dfrac{25!}{2!\, 23!} \right)$.

2. $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$.
3. $C_n^n = C_n^0 = 1$ (см. первое свойство).
4. $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n$.

**ПРИМЕР**. На строительство общежития из 25 студентов требуется выбрать 3 человек. Каково число всех возможных вариантов выбора этой тройки?

***Решение***. Число возможных вариантов равно числу комбинаций (соединений) из 25 элементов по 3 в каждом. Причем комбинации отличаются друг от друга только составляющими их элементами, а порядок их расположения не имеет значения. Следовательно $C_{25}^3 = \frac{25!}{3!\,22!} = \frac{23\cdot 24\cdot 25}{6} = 23\cdot 100 = 2300$.

***Сочетание с повторениями*** из $n$ элементов по $k$ в каждом может содержать любой элемент сколько угодно раз от 1 до $k$ включительно, либо не содержать его вовсе. Другими словами, каждое сочетание с повторениями из данных $n$ элементов по $k$ элементов в каждом может состоять не только из $k$ различных элементов, но из $k$ каких угодно и как угодно повторяющихся элементов.

Два сочетания по $k$ элементов не считаются различными сочетаниями, если они отличаются друг от друга только порядком расположения элементов.

Число сочетаний с повторениями вычисляется по формуле:
$\left(C_n^k\right)_{\text{с повт.}} = C_{n+k-1}^k$

**ПРИМЕР**. Каким числом способов можно составить расписание занятий из 3-х пар на один день, если изучается 10 предметов, которые могут повторяться в расписании. Расписания считаются различными, если отличаются друг от друга, хотя бы одним предметом (т.е. порядок предметов в расписании роли не играет)?

**Решение**. $\left(C_{10}^3\right)_{\text{с повт.}} = C_{12}^3 = \frac{12!}{3!\;9!} = \frac{10\cdot 11\cdot 12}{6} = 10\cdot 11\cdot 2 = 220$.

**Замечания.**

1. Сформулируем правило произведения для соединений множеств: пусть элемент $x_1$ может быть выбран $n_1$ способами. При каждом выбранном $x_1$, элемент $x_2$ может быть выбран $n_2$ способами. Далее, при каждом выборе уже пары $x_1, x_2$, элемент $x_3$ может быть выбран $n_3$ способами и т. д. Наконец, при каждом выборе $x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}$, элемент $x_k$ может быть выбран $n_k$ способами. Тогда число различных строк $\left(x_1, \ldots, x_k\right)$ равно произведению $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k = \prod_{i=1}^{k} n_i$.

**Например**. Сколькими способами можно выбрать четырехзначное число, все цифры которого различны? $9\cdot 9\cdot 8\cdot 7 = 4536$

2. При большом $n$ пользуются приближенной формулой Стирлинга $n! \approx n^n e^{-n}\cdot\sqrt{2\pi n}$.

## Теория вероятностей.
### Различные определения вероятности событий.

Понятие события является первичным, как, например, в геометрии, понятие точки или прямой, а в математическом анализе - понятие множества.

Под ***случайным событием*** понимается все то, о чем имеет смысл говорить, что оно либо происходит, либо не происходит при выполнении определенной системы условий, то есть, всякий факт (явление), который в результате опыта может произойти или не произойти. ***Опытом (или - испытанием)*** называется выполнение некоторого комплекса условий. Случайное событие, состоящее только из одного исходы, называется ***элементарным событием.*** *Элементарное событие, в свою очередь, являющееся результатом опыта, называется также исходом опыта.*

Рассмотрим несколько примеров.

1. При измерении некоторой величины, результат измерения окажется равным некоторому заданному числу. Это событие.

2. В ящике находятся шары, различающиеся лишь цветом: белые, красные, синие. Из ящика наудачу извлекают один шар. Появление при этом шара, например, белого цвета - событие.

3. Попадание и промах при выстреле является событием.

Событие называется ***достоверным*** (обозначается $U$), если оно обязательно происходит в результате данного испытания, т. е. при выполнении определенной совокупности условий $S$. Например, при бросании игральной кости (всем известного кубика с указанием числа очков на его шести гранях) событие «выпадение на верхней грани по крайней мере одного из шести очков» есть достоверное событие.

Событие называется ***невозможным*** (обозначается $V$), если оно не может произойти в результате данного опыта. В предыдущем примере событие «выпадение на верхней грани игральной кости дробного числа очков» - невозможное событие.

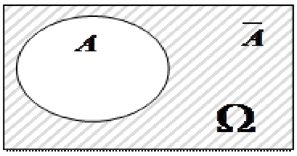
События мы будем обозначать заглавными печатными буквами латинского алфавита: $A, B, C, ...$

***Пространством*** $\Omega$ ***элементарных событий*** будем называть всё множество исходов $\{\omega_k\}$, взаимно исключающих друг друга в данном испытании (естественно, при выполнении определенной системы условий $S$), дополненное ***V*** и ***U***, как подмножеством самого себя. Заметим, что $\Omega$ может быть как конечным, так и бесконечным множеством.

После этого определения, нетрудно сделать вывод, что случайным событием называется любое подмножество пространства элементарных исходом.

В рассмотренных примерах события являются случайными, их, как уже отмечалось, обозначают заглавными печатными буквами латинского алфавита: $A, B, C, ...$ Далее, если рассматривать случай бросания игральной кости, то при одном бросании элементарных исходов всего шесть. Обозначим их через $\omega_k,\ k = 1, 2, ..., 6$. Пространством элементарных исходов в этом случае является множество

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\} \cup V \cup U.$$




Тогда, например, событие $A$ - выпадение грани с четным числом очков можно записать в виде: $A = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\},\quad A \subset \Omega$; событие $B$ выпадение грани с нечетным числом очков: $B = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5\},\quad B \subset \Omega$.

**Отношения между событиями**

**1**. Если при появлении события $A$ событие $B$ обязательно происходит, то говорят, что ***событие*** $A$ ***влечет событие*** $B$. Обозначение $A \subset B$.

Например, $A$ - выпадение на верхней грани игральной кости числа очков, кратного 3, а $B$ - выпадение числа очков, кратного 2. Тогда, случай $\omega_6$ - выпадение на верхней грани числа очков равного 6, влечет событие $A$ и событие $B$.

**2**. Говорят, что ***события*** $A$ ***и*** $B$ ***эквивалентны (равноправны)*** и пишут $A \sim B$ (или $A = B$) если $A \subset B \wedge B \subset A$.

**3**. ***События*** $A$ ***и*** $B$ ***называются несовместными*** в данном испытании, если появление одного из них автоматически исключает появление другого. ***Впротивном случае события*** $A$ ***и*** $B$ ***называются совместными***. Другими словами, в результате испытания возможно их совместное осуществление, т. е. соответствующие множества $A$ и $B$ имеют общие элементы.

Например, при единичном бросании игральной кости событие $A$ - выпадение грани с четным числом очков и событие $B$ - выпадение грани с нечетным числом очков - *н е с о в м е с т н ы*, а событие $C$ - выпадение числа очков, кратного 3 и $D$ - выпадение числа очков, кратного 2 - *с о в м е с т н ы*, так как в пространстве элементарных исходов $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\} \cup V \cup U$ есть случай $\omega_6 \in C$ и $\omega_6 \in D$.

**4**. ***Противоположным событием*** $\overline{A}$ для события $A$ называется дополнение множества $A$ до $\Omega$, т.е. $\overline{A}$ наступает при условии, что $A$ не происходит ($\overline{A}$ состоит из элементов $\Omega$, не вошедших в $A$). Другими словами, $\overline{A}$ состоит в непоявлении $A$. Так, очевидно, что событие $B$ – выпадение грани с нечетным числом очков, является противоположным событием для события $A$ – выпадение грани с четным числом очков, то есть $B = \overline{A}$.

**Операции над событиями**

***1. Суммой*** (или объединением) двух событий $A$ и $B$ называется событие $C = A$ $+ B$ (или $A \cup B$) и состоящее в том, что появляется (происходит) хотя бы одно из указанных событий $A$ или $B$. Другими словами - появляется или $A$, или $B$, или $A$ и $B$ одновременно.

Сумма совместных событий $A$ и $B$ показана на рис.1, а сумма несовместных событий - на рис.2.

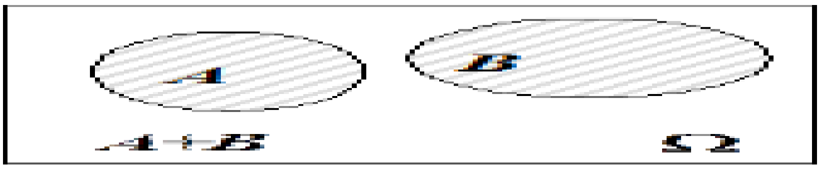



Рис.2

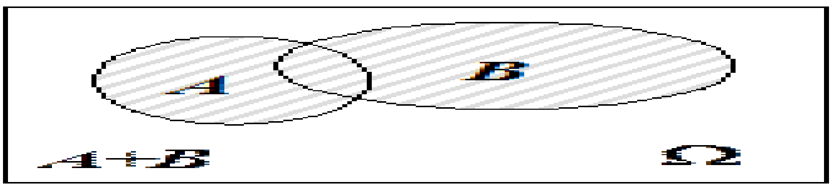



Рис.1

Сумма (объединение) событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ обозначается $\sum_{i=1}^{n} A_i$ (или $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$). Замечу, что $A + \overline{A} = U$ - т. е. достоверное событие.

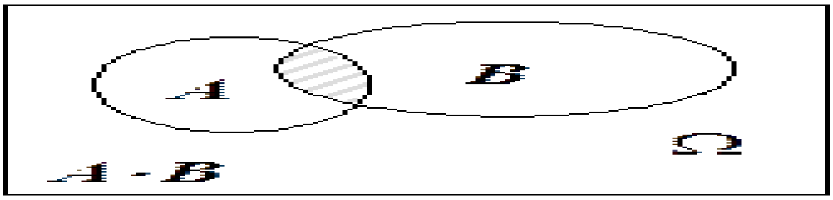



Рис.3

**2**. ***Произведением*** (или пересечением) нескольких событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называется событие, представляющее собой совместное появление этих событий. Обозначается $\prod_{i=1}^{n} A_i$ (или $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$). Например, если рассматривать два события $A$ и $B$, то их произведение $A \cdot B$ (или - пересечение $A \cap B$) обозначает появление и события $A$, и события $B$ одновременно (см. Рис.3)

Очевидно, если $A$ и $B$ несовместны, то $A \cdot B = V$ невозможное событие (или $A \cap B = \varnothing$). Кроме того, если вы вспомните свойства операций над множествами, то очевидно, что выполняется принцип двойственности: $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}, \quad \overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$.

**3**. ***Разность*** событий $A$ **и** $B$ называется событие, обозначаемое $A \setminus B$ и состоящее в том, что $A$ происходит, а $B$ при этом не происходит. Очевидно, что противоположное для $A$ событие $\overline{A} = \Omega \setminus A$.

Введем теперь одно из важных понятий - понятие полной системы (или полной группы) событий.

**Определение:** Система (или - группа) событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называется полной, если она является несовместной (а именно - попарно несовместной), то есть

$$A_i \cdot A_j = V, \quad i \neq j \qquad \left(A_i \cap A_j = \varnothing\right)$$

и сумма (объединение) этих событий составляет достоверное событие:

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_n = U \qquad \left(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \Omega\right),$$

т.е. в результате некоторого опыта хотя бы одно из них обязательно происходит.

**Классическое определение вероятности.**

Классическое определение вероятности случайного события вводится, когда пространство элементарных событий $\Omega$ конечно и представляет собой полную систему (группу) событий.

Говорят, что *случай* $\omega_i \in \Omega$ *благоприятен событию* $A$ (или благоприятствует появлению события $A$), если его появление влечет обязательное появление события $A$ (т. е. $\omega_i \subset A$) и *не благоприятен событию* $A$ (или - не благоприятствует появлению события $A$), если его появление исключает появление события $A$.

**Определение**: Вероятностью (классической) события $A$ называется число $p$ ($p = P(A)$), равное отношению числа $m$ исходов, благоприятствующих появлению события $A$, к общему числу $n$ (единственно возможных и равновозможных) элементарных исходов, образующих полную систему событий:

$p = \frac{m}{n}$.

Из этого определения следует, что элементарные случаи $\omega_i \in \Omega, \quad i = \overline{1,n}$ являются равновероятными событиями, т.е. $P(\omega_i) = \frac{1}{n}$. Таким образом, классическая схема может служить моделью тех случайных явлений, для которых представляется естественным предположение «равновозможности» различных исходов, что часто следует из определенной симметрии и выполняется в области азартных игр, лотерей, при выборочном контроле, выборочных статистических исследованиях и т.п.

Ограниченностью или <u>*недостатками*</u> классического определения вероятности является то, что:

1. $\Omega$ - конечно. Всегда возникает стремление и желание обобщить это понятие;

2. невозможно представить результат испытания в виде совокупности элементарных событий;

3. трудно указать основания, считать элементарные события равновозможными (равновероятными).

Наряду с недостатками есть и <u>*положительные*</u> стороны этого определения. В частности то, что с помощью классического определения вероятность события можно вычислить, что очень важно, до начала проведения опыта.

**Основные свойства вероятности. Теорема сложения. Условная вероятность.**

Сразу же отметим, что рассматривая основные свойства вероятности, будем говорить лишь о таких событиях, для определения вероятностей которых можно построить полную систему событий с конечным числом исходов.

Первые два свойства очевидны:

1. $P(V) = 0,$ где $V$ - невозможное событие;

2. $0 \le P(A) \le 1, \ \forall A \in \Omega$

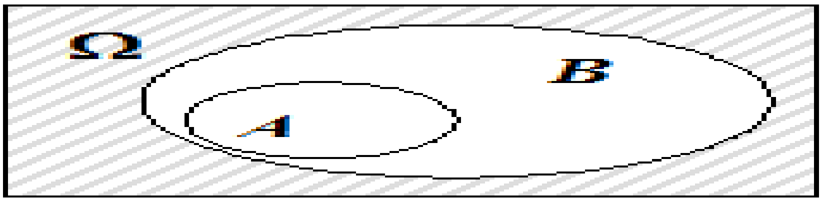
***Замечание 1***. Если вероятность события равна нулю (единице), то это еще не означает, что событие невозможное (достоверное). Это означает только то, что при неограниченном увеличении числа опытов частота появления этого события будет стремиться к нулю (единице).

Сформулируем еще несколько свойств. А именно:

***2.*** Если $A_1, A_2, \ldots, A_n$ - полная группа попарно несовместных событий, то $\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1$ Действительно, из определения полной группы (системы) событий следует, что $\sum_{i=1}^{n} A_i = U \Rightarrow P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(U) = 1$.

Но, (III-аксиома) $P(A_1 + A_2 + ... + A_n)_= = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n) = 1 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1$.

4. Если событие $A$ влечет за собой событие $B$ (т.е. $A \subset B$), то вероятность события $A$ не может превышать вероятность события $B$, т.е. $P(A) \le P(B)$.




***Замечание 2.*** Выше, при доказательстве свойств использовалось аксиоматическое определение вероятности. Нетрудно доказать, например теорему сложения вероятностей несовместных событий, используя классическое определение вероятности.

**ТЕОРЕМА (*сложения вероятностей несовместных событий*):** Если события $A$ и $B$ несовместны, т.е. $A \cap B = \varnothing \Rightarrow P(A + B) = P(A) + P(B)$

**ПРИМЕР**. В урне 100 шаров, из них 20 белых (не цветных), 30 синих и 50 красных. Какова вероятность появления цветного шара?

***Решение***. Пусть событие $A$ - появление белого шара $\Rightarrow P(A) = \frac{20}{100} = 0{,}2$; событие $B$ - появление синего шара $\Rightarrow P(B) = \frac{30}{100} = 0{,}3$; событие $C$ - появление красного шара $\Rightarrow P(C) = \frac{50}{100} = 0{,}5$.

Найдем:

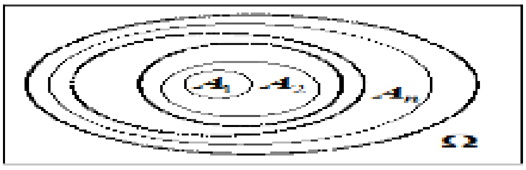
$P(B + C) = P(B) + P(C) = 0{,}3 + 0{,}5 = 0{,}8$,

или

$P(B + C) = P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$.

***Замечание 3.*** Для несчетного случая исходов, составляющих $\Omega$, теорема сложения несовместных событий принимается в качестве одной из основных аксиом теории вероятностей: $A_i \cap A_j = \varnothing;\ i \ne j \Rightarrow P\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

Заметим также, что если $P(A) = p$ и $P(\overline{A}) = q \Rightarrow p = 1 - q$.




Будем говорить, что последовательность событий $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ монотонно возрастает (см. рис.), если $A_1 \subset A_2 \subset ... \subset A_n \subset ...$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Аналогично, последовательность событий $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ монотонно убывает, если $A_1 \supset A_2 \supset \dots\dots \supset A_n \supset \dots$

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$.

**ТЕОРЕМА (*непрерывности*):** Если последовательность $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ монотонна, то $\lim\limits_{n\to\infty} P(A_n) = P\left(\lim\limits_{n\to\infty} A_n\right)$.

Итак, ране нами было введено понятие вероятности как числовой функции, удовлетворяющей трём основным аксиомам. Такую ***вероятность*** называют ***безусловной***, подчеркивая этим, что она не зависит ни от каких дополнительных условий, кроме фиксированного комплекса условий $S$, которым характеризуется данный конкретный эксперимент.

**Определение**. Пусть $A$ и $B$ - наблюдаемые события при выполнении условий $S$, причем $P(A) > 0$, тогда вероятность события $B$, вычисленная в предположении, что произошло событие $A$, называется **условной вероятностью** события $B$ (обозначается $P(B/A)$ или $P_A(B)$) и определяется равенством

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cdot B)}{P(A)}.$$

Для краткости условную вероятность $P(B \mid A)$ называют *«вероятностью события $B$ при условии $A$»*. Заметим, что при $P(A) = 0$ условная вероятность $P(B \mid A)$ не определена.

**ПРИМЕР**. В урне 8 белых и 2 красных шара. Событие $A$ - появление белого шара. Очевидно, что до испытания (вынимание шаров) $P(A) = \frac{8}{10} = 0{,}8$. Вынут один шар (шар в урну не возвращается). Этот шар оказался белым. Следовательно, во втором испытанием $P(B \mid A) = \frac{7}{9}$, где событие $B$ - появление белого шара во втором испытании.

**ТЕОРЕМА (*умножения вероятностей*):** Вероятность произведения любых двух событий $A$ и $B$ вычисляется по формуле:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B \mid A) = P(B) \cdot P(A \mid B)$$

***Замечание***. Для случая трех событий теорема умножения вероятностей имеет вид:

$$P(A \cdot B \cdot C) = P(A \cdot B) \cdot P(C \mid (A \cdot B)) = P(A) \cdot P(B \mid A) \cdot P(C \mid (A \cdot B)).$$

**ПРИМЕР**. Каждая буква слова «лотос» написана на отдельной карточке. Какова вероятность того, что наугад извлеченные одна за другой три карточки составят слово «сто»?

***Решение***. Пусть $A_1$ - событие, состоящее в том, что на первой карточке написана буква «С»; $A_2$ - на второй карточке буква «Т»; $A_3$ - на третьей карточке буква «О» и пусть $A$ - событие, состоящее в том, что получилось слово «СТО». Нетрудно видеть, что $A = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$

Далее: $P(A_1)=\frac{1}{5}$; $P(A_2 \mid A_1)=\frac{1}{4}$; $P(A_3 \mid A_1 A_2)=\frac{2}{3}$.

Тогда, по теореме, получаем: $P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3)=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{30}$

**Определение 1**: <u>*Событие*</u> $A$ <u>*называется независимым от события*</u> $B$, удовлетворяющего условию $P(B)>0$, если выполняется равенство $P(A \mid B)=P(A)$.

**Определение 2**: <u>*События*</u> $A$ <u>*и*</u> $B$ <u>*называются независимыми*</u>, если $P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)$.

**Определение 3**: <u>*События*</u> $A_1, A_2, \ldots, A_n$ <u>*называются независимыми в совокупности*</u>, если для любого набора из $m$ событий $(m \le n)$(т.е. для любого набора индексов $i_1, i_2, \ldots, i_m$ ), которые попарно независимы, справедливо равенство:

$$P\left(\prod_{k=1}^{m} A_{i_k}\right)=\prod_{k=1}^{m} P\left(A_{i_k}\right)$$

Важно здесь отметить то, что из попарной независимости ещё не следует независимость в совокупности. Рассмотрим пример.

**ПРИМЕР** (Бернштейна). Имеем правильный тетраэдр, грани которого окрашены следующим образом:

n красным цветом (появление этого цвета - событие $A$);

n синим цветом (появление этого цвета - событие $B$);

n зелёным цветом (появление этого цвета - событие $C$;

n полосы красного, синего и зеленого цветов.

Вычислим: $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$;

1. Проверим, являются ли события $A, B, C$ попарно независимыми.

$$P(A\cdot B)=\frac{1}{4},\quad P(A)\cdot P(B)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}\ \Rightarrow\ P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B);$$

$$P(A\cdot C)=\frac{1}{4},\quad P(A)\cdot P(C)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}\ \Rightarrow\ P(A\cdot C)=P(A)\cdot P(C);$$

$$P(B\cdot C)=\frac{1}{4},\quad P(B)\cdot P(C)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}\ \Rightarrow\ P(B\cdot C)=P(B)\cdot P(C)$$.

Вывод: события $A, B, C$ - попарно независимы.

2. Проверим их независимость в совокупности.

$$P(A\cdot B\cdot C)=\frac{1}{4},\ \ P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}\Rightarrow P(A\cdot B\cdot C)\neq P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)$$

Следовательно, как видим, попарной независимости недостаточно для независимости в совокупности.

**ТЕОРЕМА (*сложения вероятностей совместных событий*):** Если события $A$ и $B$ совместны, т.е. $A\cap B\neq\varnothing\Rightarrow P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A\cdot B)$.

Другими словами : Вероятность суммы совместных событий $A$ и $B$ равна сумме вероятностей этих событий минус вероятность их произведения.

**ПРИМЕР**. Вероятность попадания в мишень первым стрелком равна 0,8; для второго стрелка эта вероятность равна 0,6. Стрелки независимо друг от друга произвели по одному выстрелу. Какова вероятность того, что в мишень попадет хотя бы один стрелок?

***Решение***. Пусть

$A$ - событие, состоящее в том, что мишень поражена первым стрелком;

$B$ - мишень поражена вторым стрелком;

$C$ - мишень поражена хотя бы одним стрелком (т.е. - или первым, или вторым, или - обоими стрелками одновременно). Очевидно, что $C=A+B$, причем, $A,B$ - совместны (возможно их совместное появление).

Тогда:

$$P(C)=P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A\cdot B)=\left[\begin{array}{l}A,\ B\ -\textit{независимы}\\ P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)\end{array}\right]=$$

$$=0{,}8+0{,}6-0{,}8\cdot 0{,}6=0{,}92$$

**Следствие 1**.

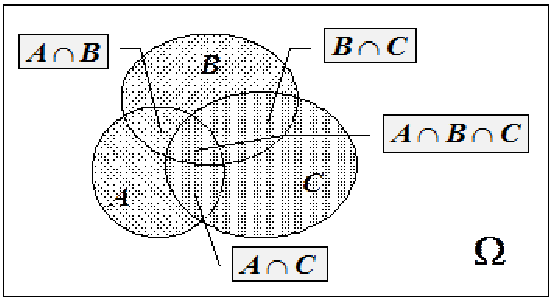
Если события $A$ и $B$ независимы,

то $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A)\cdot P(B)$.

**Следствие 2.**

Если события $A$ и $B$ несовместны ($A\cdot B=V$),

то $P(A+B)=P(A)+P(B)$.




**Замечание**. Из геометрических соображений (см. рис.) очевидно, что:

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-$$
$$-\ P(A\cdot B)\ -\ P(A\cdot C)\ -\ P(B\cdot C)\ +$$
$$+P(A\cdot B\cdot C).$$

## Формула полной вероятности

<u>*Постановка задачи*</u>: Пусть $H_1, H_2, ..., H_n$ - полная система (группа) попарно несовместных событий (в дальнейшем эти события $H_i,\ i=\overline{1,n}$ будем называть гипотезами) т. е.

$$H_i \cdot H_j = V, \quad i \neq j; \qquad H_1 + H_2 + ... + H_n = U$$

или, что то же самое,

$$H_i \cap H_j = \varnothing, \quad i \neq j; \qquad H_1 \cup H_2 \cup ... \cup H_n = \Omega,$$

и пусть ***событие $A$ может произойти лишь совместно с каким-либо одним из этих событий (гипотез).*** Требуется найти вероятность события $A$.

Выведем формулу решения этой задачи. Имеем

$$A = (A \cap H_1) \cup (A \cap H_2) \cup ... \cup (A \cap H_n) = A \cap (H_1 \cup ... \cup H_n) = A \cap \Omega.$$

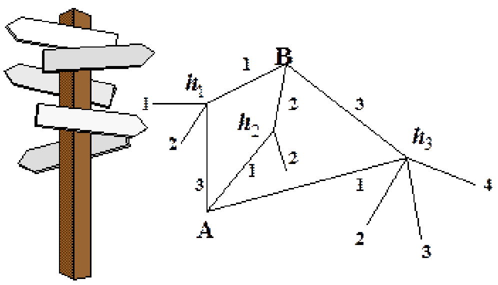
Здесь, очевидно ( см. постановку задачи ),

$$(A \cap H_i) \cap (A \cap H_j) = \varnothing,$$

поэтому

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \cdot H_i) = \begin{bmatrix} \text{по теореме} \\ \text{умножения} \\ \text{вероятностей} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A \mid H_i).$$

Полученная формула называется формулой полной вероятности.




**ПРИМЕР 1**. Турист выходит из пункта ***B*** и <u>наугад</u> выбирает на развилке один из маршрутов (схема дорог). Какова вероятность того, что он попадет в пункт ***A***?

***Решение***. Как видим из схемы дорог, путь туриста обязательно проходит через один из пунктов $h_1, h_2, h_3$. Тогда $H_i$ - гипотеза (предположение) которая состоит в том, что турист попал в пункт $h_i,\ i = 1,2,3$. Заметим, что события (гипотезы) $H_i$ попарно несовместны и равновероятны, т.е., очевидно, образуют полную группу событий: во-первых, $P(H_i) = \frac{1}{3},\ i = 1,2,3$ и, во-вторых, $P(H_1) + P(H_2) + P(H_3) = 1$. Событие $A$ - турист попал в пункт **A**. Тогда, нетрудно видеть (см. схему), что $P(A \mid H_1) = \frac{1}{3};\ P(A \mid H_2) = \frac{1}{2};\ P(A \mid H_3) = \frac{1}{4}$. Значит, по формуле полной вероятности, получаем:

$$P(A) = P(H_1)P(A \mid H_1) + P(H_2)P(A \mid H_2) + P(H_3)P(A \mid H_3) = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = \frac{13}{36}.$$