Задание:

- Изучить теорию;
- Написать краткий конспект
- Разобрать примеры решения;
- Ответить на вопросы;
- По вопросам обращаться 072-1098278 или hvastov@rambler.ru
- Фотоотчёт конспекта прислать в течение 3 дней со дня получения задания на hvastov@rambler.ru

Тема: Решение систем линейных уравнений с тремя неизвестными методом Крамера , методом Гаусса , матричным методом.

План

1.Нахождение определителей второго и третьего порядка.

2. Решение систем линейных уравнений с тремя неизвестными методом Крамера

3. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса.

4. Решение систем линейных уравнений матричным методом.

Имеем систему уравнений

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Число $a_1b_2 - a_2b_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ называется определителем второго порядка. Вертикальные прямые – знак определителя. Обозначается определитель знаком "Δ" (дельта).

Итак определитель – это число, которое вычисляется по определенному правилу

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$$

$\begin{matrix} a_1 \\ a_2 \end{matrix}$ – первый столбик (коэффициенты при переменной х)

$\begin{matrix} b_1 \\ b_2 \end{matrix}$ – второй столбик (коэффициенты при переменной у)

$a_1 \quad b_1$ – первая строчка (коэффициенты при переменных первого уравнения)

$a_2 \quad b_2$ – вторая строчка (коэффициенты при переменных второго уравнения)

Определители при переменных Δ_x и Δ_y получаются из определителя системы путем замены соответствующего столбика столбиком из свободных членов.

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1b_2 - c_2b_1 \qquad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1c_2 - a_2c_1$$

Для нахождения значений переменных x и y используются формулы $x = \frac{\Delta_x}{\Delta}$; $y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$, которые называются формулами Крамера.

Решить систему уравнений:

$$1)\begin{cases} 5x - 7y = 19 \\ 2x + 3y = -4 \end{cases}$$

$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -7 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 5 \cdot 3 - 2 \cdot (-7) = 15 + 14 = 29 \quad \Delta \neq 0,$ система имеет единственное решение

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 19 & -7 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = 57 - (-4) \cdot (-7) = 57 - 28 = 29$$

$\Delta_y = \begin{vmatrix} 5 & 19 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -20 - 2 \cdot 19 = -20 - 38 = -58$ Ответ: (1; –2).

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{29}{29} = 1; \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-58}{29} = -2$$

Система трех линейных уравнений с тремя переменными имеет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = c_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = c_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = c_3 \end{cases}$$

На I курсе рассматривается решение такой системы с помощью определителя третьего порядка.

Выражение, составленное из коэффициентов при переменных в виде таблицы $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ называется определителем третьего поряда.

Определитель третьего порядка вычислить можно через определитель второго порядка или по правилу Саррюса (правило треугольника).

1) Через определитель II порядка.

$$\begin{vmatrix} \boxed{a_{11}} & \boxed{a_{12}} & \boxed{a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} \cdot (a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13} \cdot (a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22})$$

Выделяем a_{11} и мысленно вычеркиваем по столбику и строчке, оставшиеся члены составляют определитель второго порядка. Берем a_{12} с противоположным знаком и вычеркиваем первую строчку и второй столбик, оставшиеся члены составляют определитель II порядка. Аналогично берем a_{13} и вычеркиваем первую строчку и третий столбик, оставшиеся члены составляют определитель II порядка.

Выполняем вычисления определителей II порядка по известному уже нам правилу.

Например:

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & -4 \\ -4 & 1 & 3 \\ 5 & 7 & -1 \end{vmatrix} = 3\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} + 2\cdot\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} - 4\cdot\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 3\cdot(-1-21)+2(4-15)-4(-28-5)=$$

$$=-66-22+132=-88+132=44;$$

2) Правило треугольника (Саррюса). Рассмотрим схематически

$$\begin{vmatrix} . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \end{vmatrix}_a - \begin{vmatrix} . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \end{vmatrix}_b$$

a) (основания равнобедренных треугольников параллельны главной диагонали)

b) (основания равнобедренных треугольников параллельны побочной диагонали)

Пример: (возьмем тот же определитель)

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & -4 \\ -4 & 1 & 3 \\ 5 & 7 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -4 \\ -4 & 1 & 3 \\ 5 & 7 & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & -2 & -4 \\ -4 & 1 & 3 \\ 5 & 7 & -1 \end{vmatrix} = -3-30+112+20-63+8=-96+140=44$$

В дальнейшем запись будем вести так

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 6 \\ -5 & 1 & -2 \\ 1 & -4 & 3 \end{vmatrix} = 6+6+120-6-16-45=132-67=65$$

$$\left(\begin{matrix} 2\cdot1\cdot3+(-3)\cdot(-2)\cdot1+(-5)\cdot(-4)\cdot6-1\cdot1\cdot6-(-4)\cdot(-2)\cdot2-(-5)\cdot(-3)\cdot3= \\ =6+6+120-6-16-45=132-67=65 \end{matrix}\right)$$

Определители $\Delta_x;\Delta_y;\Delta_z$ получаются из определителя системы путем замены соответствующего столбика столбиком из свободных членов и вычисляются по тому же правилу, что и определитель системы.

Для нахождения значений $x;y;z$ пользуются правилами Крамера

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}; \qquad y=\frac{\Delta_y}{\Delta}; \qquad z=\frac{\Delta_z}{\Delta}$$

Исследование:

1. Если $\Delta\neq0$, то система имеет единственное решение
2. Если $\Delta=0$, то система несовместима, т.е. не имеет решения

(либо $\Delta_x\neq0$; либо $\Delta_y\neq0$; либо $\Delta_z\neq0$)

3. Если $\Delta=0$, то система неопределенна, т.е. имеет множество решений

($\Delta_x=0$ и $\Delta_y=0$ и $\Delta_z=0$)

Определитель III порядка обладает всеми свойствами определителя II порядка.

Нпример, решить систему уравнений

$$1)\begin{cases}3x+y+z=-2\\5x-y-z=10\\x-y+5z=-12\end{cases}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix}3 & 1 & 1\\5 & -1 & -1\\1 & -1 & 5\end{vmatrix}=15-1-5+1-3-25=-20-28=-48\neq 0$$

$$\Delta_x=\begin{vmatrix}-2 & 1 & 1\\10 & -1 & -1\\-12 & -1 & 5\end{vmatrix}=10+12-10-12+2-50=24-72=-48$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix}3 & -2 & 1\\5 & 10 & -1\\1 & -12 & 5\end{vmatrix}=150+2-60-10-36+50=202-106=96$$

$$\Delta_z=\begin{vmatrix}3 & 1 & -2\\5 & -1 & 10\\1 & -1 & -12\end{vmatrix}=36+10+10-2+30+60=56+90-2=146-2=144$$

$$x=\frac{-48}{-48}=1;\quad y=\frac{96}{-48}=-2;\quad z=\frac{144}{-48}=-3$$

Ответ: (1; –2; –3).

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3$$

$$3x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 0$$

$$x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1$$

Решение системы линейных алгебраических уравнений методом Гаусса

Для проверки ответов можете воспользоваться нашим онлайн сервисом - Решение системы линейных уравнений методом Гаусса. Все действия описанные в данном разделе не противоречат правилам обращения с матрицами и являютсяэлементарными преобразованиями матрицы. Если после изучения примеров решения задач у Вас останутся вопросы, то Вы всегда можете задать их на форуме, и не забывайте про наши онлайн калькуляторы для решения задач по математике и другим предметам!

Перепишем систему линейных алгебраических уравнений в матричную форму. Получится матрица 3 × 4, слева от разделительной линии стоят коэффициенты при переменных, а справа стоят свободные члены.

Проведём следующие действия:

- Из строки № 2 вычтем строку № 1 умноженную на 3 (Строка 2 - 3 × строка 1)
- Из строки № 3 вычтем строку № 1 (Строка 3 - строка 1)

Получим:

$$\left(\begin{array}{cc|c} & & 9 \\ 1 & 2 & \\ & & 2 \end{array}\right)$$

Проведём следующие действия:

- Строку № 2 умножим на -1 (Строка 2 = -1 × строка 2)
- Из строки № 3 вычтем строку № 2 (Строка 3 - строка 1)

Получим:

$$\left(\begin{array}{cc|c} & 1 & 11 \end{array}\right)$$

Проведём следующие действия:

- Строку № 3 умножим на -1 (Строка 3 = -1 × строка 3)
- Из строки № 2 вычтем строку № 3 умноженную на 2 (Строка 2 - 2 × строка 3)
- Из строки № 1 вычтем строку № 3 умноженную на 3 (Строка 1 - 3 × строка 3)

Получим:

$$\left(\begin{array}{cc|c} & & 30 \\ & & 13 \end{array}\right)$$

1

Проведём следующие действия:

- Из строки № 1 вычтем строку № 2 умноженную на 2 (Строка 1 - 2 × строка 2)

Получим:

$$\left(\begin{array}{c|c} & 4 \\ & 13 \\ & 1 \end{array}\right)$$

В левой части матрицы по главной диагонали остались одни единицы. В правом столбце получаем решение:

x_1 = -4

x_2 = -13

x_3 = 11

Матричный метод может применяться в решении систем линейных уравнений, в которых число неизвестных равно числу уравнений, то есть систем линейных уравнений с квадратной матрицей коэффициентов при неизвестных.

Другое условие применимости матричного метода - невырожденность матрицы коэффициентов при неизвестных, то есть неравенство нулю определителя этой матрицы.

Систему линейных уравнений, при выполнении вышеназванных условий, можно представить в матричном виде, а затем решить её путём отыскания обратной матрицык матрице системы.

Решение систем линейных уравнений матричным методом основано на следующем свойстве обратной матрицы: произведение обратной матрицы и исходной матрицы равно единичной матрице. Обратная матрица обозначается символом .

Пусть нужно решить систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

Запишем эту систему уравнений в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Обозначим отдельно как А матрицу коэффициентов при неизвестных и как В матрицу неизвестных и матрицу свободных членов

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Тогда

$$A \bullet X = B$$

$$A^{-1} \bullet A \bullet X = A^{-1} \bullet B$$

$$X = A^{-1} \bullet B$$

То есть, для нахождения решений системы нужно обе части уравнения умножить на матрицу, обратную матрице коэффициентов при неизвестных и приравнять соответствующие элементы полученных матриц.

Алгоритм решения системы линейных уравнений матричным методом разберём на следующем примере системы линейных уравнений второго порядка.

Пример 1. Решить матричным методом систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1 \\ 3x_1 + 5x_2 = -1 \end{cases}$$

Решение состоит из следующих шагов.

Шаг 1. Составляем следующие матрицы.

Матрица коэффициентов при неизвестных:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Матрица неизвестных:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Матрица свободных членов:

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Это сделано для того, чтобы применить в решении уже записанные закономерности, основанные на свойстве обратной матрицы:

$$A \bullet X = B$$

$$A^{-1} \bullet A \bullet X = A^{-1} \bullet B$$

$$X = A^{-1} \bullet B$$

По выведенному выше последнему равенству и будем вычислять решения данной системы.

Но сначала проверим, не является ли матрица коэффициентов при неизвестных вырожденной, то есть можем ли вообще применять матричный метод:

$$|A| = 2 \bullet 5 - (-1) \bullet 3 = 13$$

Определитель этой матрицы не равен нулю, следовательно, можем применять матричный метод.

Шаг 2. Находим матрицу, обратную матрице коэффициентов при неизвестных

$$A^{-1} = \frac{1}{13} \bullet \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Шаг 3. Находим матрицу неизвестных:

$$X = \frac{1}{13} \bullet \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{13} \bullet \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{13} \\ -\frac{5}{13} \end{pmatrix}.$$

Следовательно, ответ правильный.

Для второго примера выберем систему линейных уравнений третьего порядка.

Пример 2. Решить матричным методом систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ -2x_2 + 2x_3 = 2 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Шаг 1. Составляем следующие матрицы.

Матрица коэффициентов при неизвестных:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Матрица неизвестных:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Матрица свободных членов:

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Проверим, не является ли матрица коэффициентов при неизвестных вырожденной:

$$|A| = 2 \bullet (-2) \bullet 1 + (-1) \bullet 2 \bullet 3 + 0 -$$

$$-3 \bullet (-2) \bullet 3 - 0 - 2 \bullet 1 \bullet 2 = 18 - 14 = 4.$$

Определитель этой матрицы не равен нулю, следовательно, можем применять матричный метод.

Шаг 2. Находим матрицу, обратную матрице коэффициентов при неизвестных:

$$A^{-1} = \frac{1}{4} \bullet \begin{pmatrix} -4 & 4 & 4 \\ 6 & -7 & -4 \\ 6 & -5 & -4 \end{pmatrix}$$

Шаг 3. Находим матрицу неизвестных:

$$X = \frac{1}{4} \bullet \begin{pmatrix} -4 & 4 & 4 \\ 6 & -7 & -4 \\ 6 & -5 & -4 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Итак, получили решение:

$x_1 = 1;\ \ x_2 = -2;\ \ x_3 = -1$

Сделаем проверку:

$$\begin{cases} 2 \bullet 1 - (-2) + 3 \bullet (-1) = 1 \\ -2 \bullet (-2) + 2 \bullet (-1) = 2 \\ 3 \bullet 1 + (-2) + (-1) = 0 \end{cases}$$

Следовательно, ответ правильный.

Контрольные вопросы

1) Что называется системой линейных уравнений ?
2) Что значит решить систему линейных уравнений ?
3) В чем заключается метод Крамера ?
4) Назовите формулу Крамера
5) Как решить систему линейных уравнений методом Гаусса ?
6) Как решить систему линейных уравнений матричным методом ?