Уважаемые студенты!

- Изучите теоретический материал;
- Написать краткий конспект;
- По вопросам обращаться 072-1098278 или hvastov@rambler.ru
- Фотоотчёт конспекта прислать в течение 3 дней со дня получения задания на hvastov@rambler.ru

План

1. Простейшие показательные уравнения и неравенства
2. Простейшие логарифмические уравнения и неравенства
3. Метод замены в показательных и логарифмических уравнениях и неравенствах
4. Показательные уравнения повышенной сложности
5. Логарифмические уравнения и неравенства повышенной сложности

Простейшие показательные уравнения и неравенства

Мы рассмотрели степенные уравнения – уравнения, у которых неизвестная стояла в основании степени. Теперь рассмотрим уравнения, в которых неизвестная стоит в показателе степени – показательные уравнения. Идея их решения очень похожа на ту, что мы использовали при решении степенных уравнений. Нужно свести уравнение к виду:

$a^f = a^g$

Т. е. так, чтобы слева и справа были степени с одинаковым основанием.

Из того, что $a^f = a^g$ следует, что $f = g$. Это следует из монотонности графика показательной функции: каждому значению функции соответствует ровно одно значение аргумента (см. рис. 1). Если значения функций равны, то равны и их аргументы.

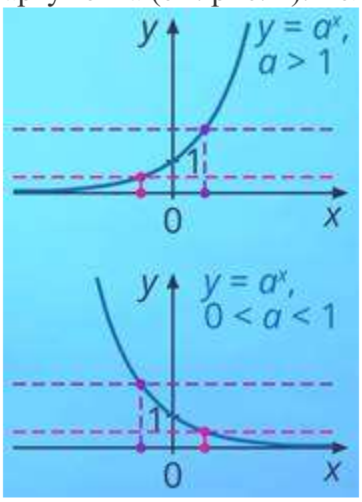

Рис. 1. Графики функций $y = a^x$ при $a > 1$ и $0 < a < 1$

Задание. Решить уравнение:

$2^{1-x} = 16$

Решение.

Слева – основание 2, сделаем справа такое же:

$16 = 2^4$

Тогда:

$2^{1-x} = 2^4$

Из этого следует, что:

$1 - x = 4$

Получили линейное уравнение:

$x = -3$

Ответ: -3.

Задание. Решить уравнение:

$9^{4x-2} = \frac{1}{27}$

Решение.

Здесь видим в основании 9 и $\frac{1}{27}$. Это все целые степени тройки, поэтому удобно левую и правую части привести к основанию 3. Применяя свойства степени, получаем:

$9^{4x-2} = (3^2)^{4x-2} = 3^{2\cdot(4x-2)} = 3^{8x-4}$

$\frac{1}{27} = \frac{1}{3^3} = 3^{-3}$

Получаем уравнение:

$3^{8x-4} = 3^{-3}$

Основание равны, значит, равны и степени:

$8x - 4 = -3$

Решая это линейное уравнение, получаем ответ:

$x = \frac{1}{8}$

Ответ: $\frac{1}{8}$.

Идея решения показательных неравенств очень похожа. Нужно привести неравенство к виду $a^f > a^g$; между частями может быть любой другой знак, все выводы будут аналогичными. Затем возможны два варианта.

Первый вариант – основание $a > 1$. Тогда соответствующая показательная функция будет возрастающей (см. рис. 2). Значит, большему значению функции соответствует больший аргумент. И из $a^f > a^g$ будет следовать, что $f > g$. Знак неравенства не поменялся.

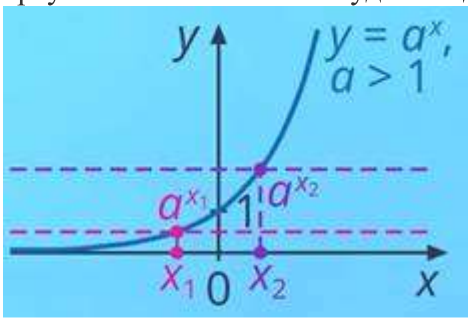

Рис. 2. График функции $y = a^x$ при $a > 1$

Второй вариант – основание $0 < a < 1$. Тогда соответствующая функция будет убывающей (см. рис. 3). Большему значению функции соответствует меньший аргумент. Значит, из $a^f > a^g$ следует, что $f < g$. Знак неравенства изменился на противоположный.

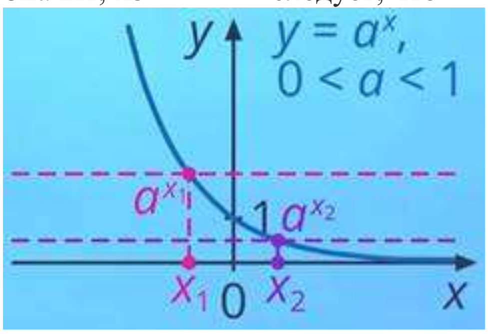

Рис. 3. График функции $y = a^x$ при $0 < a < 1$

В обоих случая получаем неравенство, обычно линейное или квадратное, которое решаем стандартными методами. Если вы не помните методы решения неравенств, можете их повторить, посмотрев уроки Линейные неравенства. Системы и совокупности неравенств; Решение квадратных неравенств. Метод интервалов.

Задание. Решить неравенство:

$5^{x-1} \geq 1$

Решение.

Приводим левую и правую часть к одинаковым основаниям. Слева – основание 5. Справа из 1 можно сделать степень с любым основанием: $a^0 = 1, a \neq 0$. Нужно 5 – делаем 5:

$1 = 5^0$

Получаем:

$5^{x-1} \geq 5^0$

Основания одинаковы и больше 1. Значит, для показателей степени знак неравенства не поменяется:

$x - 1 \geq 0$

Решая неравенство, получаем:

$[1; \infty)$

Ответ: $[1; \infty)$.

Задание. Решить неравенство:

$$\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2-x} > \left(\frac{4}{\pi}\right)^{-x^2}$$

Решение.

Неравенство выглядит громоздко, но оно не сложнее предыдущего. Действуем по алгоритму. Смотрим на основания степеней – это взаимообратные дроби. Чтобы сделать основания одинаковыми, запишем:

$$\frac{4}{\pi} = \left(\frac{\pi}{4}\right)^{-1}$$

Тогда:

$$\left(\frac{4}{\pi}\right)^{-x^2} = \left(\left(\frac{\pi}{4}\right)^{-1}\right)^{-x^2} = \left(\frac{\pi}{4}\right)^{x^2}$$

Получаем неравенство:

$$\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2-x} > \left(\frac{\pi}{4}\right)^{x^2}$$

Основание уже одинаковые. Они больше или меньше 1? $\pi \approx 3{,}14$, значит, $\frac{\pi}{4}$ будет меньше 1. Поэтому записываем неравенство для показателей степени и меняем знак:

$2 - x < x^2$

Получили квадратное неравенство. Решая его, получаем ответ:

$x \in (-\infty; -2) \cup (1; +\infty)$

Ответ: $(-\infty; -2) \cup (1; +\infty)$.

Теперь рассмотрим несколько задач, где не так очевидно, как можно привести обе части к одинаковому основанию.

Задание. Решить неравенство:

$2^x > 5$

Решение.

Чтобы представить число 5 в виде степени с основанием 2, воспользуемся основным логарифмическим тождеством. Вспомним: $a = b^{\log_b a}$ для любых положительных a и b. Тогда:

$5 = 2^{\log_2 5}$

Получаем неравенство:

$2^x > 2^{\log_2 5}$

Основания равны и больше 1. Значит:

$x > \log_2 5$

Получаем ответ:

$x \in (\log_2 5;\ +\infty)$

Ответ: $(\log_2 5;\ +\infty)$.

Задание. Решить уравнение:

$2^{x+2} - 2^x = 6$

Решение.

Здесь в левой части стоит разность степенных выражений. Прежде чем решать по алгоритму, упростим левую часть, разложив ее на множители:

$2^{x+2} - 2^x = 2^x(2^2 - 1) = 2^x \cdot 3$

Получим уравнение:

$2^x \cdot 3 = 6$

Разделив обе части уравнения на 3, получим:

$2^x = 2$

$2 = 2^1$, т. е.:

$x = 1$

Ответ: 1.

С решением еще одного показательного уравнения вы можете ознакомиться ниже.

Пример решения показательного уравнения

Задание. Решить уравнение:

$4^x = 0{,}4 \cdot 5^{2x}$

Решение.

Здесь мы видим разные основания: 4 и 5, которые сложно будет свести к одному. Можно попробовать это сделать с помощью основного логарифмического тождества, но это долгий путь. Если не получается привести к одинаковым основаниям, то можно попробовать привести к одинаковым показателям степени – в этом случае тоже можно воспользоваться свойствами степени для упрощения выражений. Поступим следующим образом.

Для начала отметим, что $4 = 2^2$, следовательно:

$4^x = (2^2)^x = 2^{2x}$

Теперь можем разделить обе части уравнения на 5^{2x} и применить свойство степеней, поскольку степени 2 и 5 теперь одинаковые:

$2^{2x} = 0{,}4 \cdot 5^{2x}$

$$\frac{2^{2x}}{5^{2x}} = 0{,}4$$
$$\left(\frac{2}{5}\right)^{2x} = 0{,}4$$

Теперь представим $0{,}4$ в виде степени с основанием $\frac{2}{5}$:

$$0{,}4 = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} = \left(\frac{2}{5}\right)^{1}$$

В итоге:

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{2x} = \left(\frac{2}{5}\right)^{1}$$
$$2x = 1$$
$$x = 0{,}5$$

Ответ: $0{,}5$.

Простейшие логарифмические уравнения и неравенства

Рассмотрим теперь решение логарифмических уравнений. Общая идея решения нам уже знакома – привести левую и правую части к логарифмам с одинаковым основанием:

$$\log_a f = \log_a g$$

Как и показательная, логарифмическая функция также имеет лишь один аргумент для каждого значения функции (см. рис. 4).

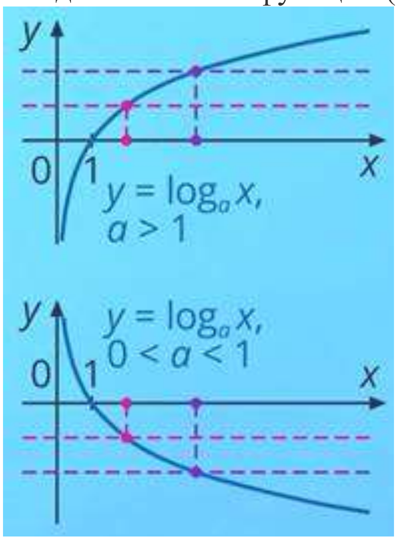

Рис. 4. Графики функций $y = \log_a x$ при $a > 1$ и $0 < a < 1$

Из равенства логарифмов будет следовать равенство подлогарифмических выражений:

$$\log_a f = \log_a g \iff f = g$$

Итак, наша задача: привести левую и правую части уравнения к логарифмам с одинаковым основанием, используя различные свойства логарифмов. Все так же, как и в показательных уравнениях. Единственное, что нужно учесть ОДЗ: подлогарифмическое выражение всегда больше 0 (ОДЗ: $f > 0; g > 0$).

Задание. Решить уравнение:

$$\log_2 x^2 = \log_2(2x + 3)$$

Решение.

Для начала выпишем ОДЗ: $x^2 > 0;\ 2x + 3 > 0$. Переходим к решению. Основания логарифмов равны, можем приравнять выражения под логарифмами:

$x^2 = 2x + 3$
Корни данного квадратного уравнения:
$x_1 = 3;\ x_2 = -1$
Выполним проверку:
$x_1 = 3$:
$3^2 = 9 > 0$
$2 \cdot 3 + 3 = 9 > 0$
Неравенства верны.
$x_2 = -1$:
$(-1)^2 = 1 > 0$
$2 \cdot (-1) + 3 = 1 > 0$
Неравенства верны.
Оба корня входят в ОДЗ.
Ответ: $-1;\ 3$.

Задание. Решить уравнение:
$\log_4(x + 0{,}75) = -1$
Решение.
ОДЗ:
$x + 0{,}75 > 0$

Чтобы привести левую часть к логарифму с основанием 4, воспользуемся одним из свойств логарифма: $n = \log_a a^n$ для любого значения n.
Таким образом:
$-1 = \log_4 4^{-1}$
Получаем уравнение:
$\log_4(x + 0{,}75) = \log_4 4^{-1}$
Основания логарифмов равны, значит:
$x + 0{,}75 = 4^{-1}$

Решая уравнение, получаем $x = -0{,}5$. Корень входит в ОДЗ:
$-0{,}5 + 0{,}75 = 0{,}25 > 0$

Ответ: $-0{,}5$.
Это же уравнение можно было решить и с помощью определения логарифма. Подробнее об этом – ниже.

Еще один способ решения уравнения
Посмотрим на уравнение $\log_4(x + 0{,}75) = -1$. По определению, логарифм – это степень, в которую нужно возвести основание логарифма, чтобы получить то, что под логарифмом. Т. е., 4 нужно возвести в -1 степень, чтобы получить $x + 0{,}75$:
$4^{-1} = x - 0{,}75$

Мы получили такое же уравнение, корнем которого также будет $x = -0{,}5$. Это вполне естественно – решая разными способами, мы получили такой же ответ. Возможно, кому-то этот способ покажется более простым. Что ж, можете его использовать. Но обратите внимание, что он не такой универсальный. Он подойдет только в случае, если в одной из частей уравнения стоит число.

Задание. Решить уравнение:
$\log_2(x+2)+\log_2(x-1)=\log_2(x+5)+1$

Решение.

Записываем ОДЗ:
$x+2>0$
$x-1>0$
$x+5>0$

Теперь нужно привести обе части уравнения к одинаковому основанию. По слагаемым понятно, что это будет основание 2. По свойству логарифмов:
$\log_2(x+2)+\log_2(x-1)=\log_2\big((x+2)(x-1)\big)$
$\log_2(x+5)+1=\log_2(x+5)+\log_2 2=\log_2\big(2(x+5)\big)$

Получаем уравнение:
$\log_2\big((x+2)(x-1)\big)=\log_2\big(2(x+5)\big)$

Основание логарифмов равны, значит, можем записать:
$(x+2)(x-1)=2(x+5)$

Получили квадратное уравнение. Попробуйте решить его самостоятельно. Его корни:
$x_1=4;\ x_2=-3$

Проверяем ОДЗ:
$x_1=4$:
$4+2=6>0$
$4-1=3>0$
$4+5=9>0$

Неравенства верны.
$x_2=-3$:
$-3+2=-1>0$
$-3-1=-4>0$
$-3+5=2>0$

Первое и второе неравенства неверны.

Получаем ответ:
$x=4$

Ответ: 4.

С решением еще одного логарифмического уравнения вы можете ознакомиться в ответвлении.

Пример решения логарифмического уравнения

Задание. Решить уравнение:
$\lg x=\log_{100}x^4$

Решение.

Сразу записываем ОДЗ:
$x>0;\ x^4>0$

Вспомним, что:
$\lg b=\log_{10}b$

Чтобы удобнее было приводить к одинаковому основанию, так и запишем:
$\log_{10}x=\log_{100}x^4$

Слева и справа основания разные. Что делать? Вспомним свойство логарифма для положительных a и b:

$\log_{a^k}b=\frac{1}{k}\log_a b;\ a,b>0, a\neq 1$

Поскольку $100 = 10^2$, то:
$\log_{10^2} x^4 = \frac{1}{2}\log_{10} x^4$
Теперь внесем коэффициент перед логарифмом, используя свойство:
$m\log_a b = \log_a b^m$; $a, b > 0, a \neq 1$
$\frac{1}{2}\log_{10} x^4 = \log_{10}(x^4)^{\frac{1}{2}}$
Получили уравнение:
$\log_{10} x = \log_{10}(x^4)^{\frac{1}{2}}$
Основания равны, значит:
$x = (x^4)^{\frac{1}{2}}$
По свойству степени:
$(x^4)^{\frac{1}{2}} = x^{4\cdot\frac{1}{2}} = x^2$
Получили квадратное уравнение:
$x = x^2$
Его корни: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$.
Проверяем:
$x_1 = 0$:
$0 > 0$
$0^4 = 0 > 0$
Неравенства неверны.
$x_2 = 1$:
$1 > 0$
$1^4 = 1 > 0$
Неравенства верны.
Получаем ответ:
$x = 1$
Ответ: 1.

Наконец, рассмотрим простейшие логарифмические неравенства. Идея та же: привести к одинаковому основанию. Далее, как и в показательных неравенствах, смотрим на основание.
Если $a > 1$, то записываем неравенство уже без логарифмов и знак не меняем:
$\log_a f > \log_a g \ \Leftrightarrow f > g$
Если $0 < a < 1$, то знак меняем на противоположный:
$\log_a f > \log_a g \ \Leftrightarrow f < g$
Также на забываем учесть ОДЗ: $f > 0; g > 0$.

Задание. Решить неравенство:
$\log_2(x+3) < 0$
Решение.
ОДЗ:
$x + 3 > 0$
Левую часть неравенства нужно представить, как логарифм с основанием 2. По свойству логарифмов:
$0 = \log_2 2^0 = \log_2 1$
Тогда:

$\log_2(x+3) < \log_2 1$

Основания логарифмов одинаковые и больше 1. Можем записать неравенство для подлогарифмических выражений, не меняя знак:

$x+3 < 1$

С учетом ОДЗ получаем систему неравенств:

$$\begin{cases} x+3 > 0 \\ x+3 < 1 \end{cases}$$

Получаем ответ:

$x \in (-3;-2)$

Ответ: $(-3;-2)$.

Метод замены в показательных и логарифмических уравнениях и неравенствах

Мы разобрали простейшие показательные и логарифмические уравнения и неравенства. В них мы всегда могли свести левую и правую части к одинаковым основаниям. Сейчас мы разберем несколько задач, которые можно свести к этим самым простейшим уравнениям и неравенствам.

Метод, который нам понадобится, мы уже использовали при решении рациональных и тригонометрических уравнений – это метод замены. Нужно увидеть одинаковые блоки выражений в условии и заменить их новой переменной (Практика. Решение квадратных и дробно-рациональных уравнений. Практика. Тригонометрические уравнения и неравенства. Базовый уровень).

Задание. Решить уравнение:

$2\log^2{}_9 x - \log_9 x = 1$

Решение.

Укажем ОДЗ:

$x > 0$

Обратите внимание, что в первом слагаемом логарифм в квадрате. Поэтому использовать свойства логарифмов с одинаковым основанием не получится. Но у нас есть повторяющийся элемент: $\log_9 x$. Введем замену:

$\log_9 x = t$

Тогда:

$\log^2{}_9 x = t^2$

Получаем уравнение:

$2t^2 - t = 1$

Получили квадратное уравнение. Его корни:

$$\left[\begin{array}{l} t_1 = 1 \\ t_2 = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

Не забываем выполнить обратную замену:

$$\left[\begin{array}{l} \log_9 x = 1 \\ \log_9 x = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

Теперь у нас два простейших уравнения. Итак, в первом уравнении:

$\log_9 x = \log_9 9$

$x = 9$

Во втором:

$\log_9 x = \log_9 9^{-\frac{1}{2}}$

$x = 9^{-\frac{1}{2}}$

Значение $9^{-\frac{1}{2}}$ можно вычислить:

$$9^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{9^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3}$$

Оба корня входят в ОДЗ.

Ответ: $\frac{1}{3}; 9$.

В некоторых уравнениях замена не сразу очевидна. Сначала нужно преобразовать уравнение, чтобы ее увидеть.

Задание15. Решить уравнение:

$$9^x + 3^{x+1} - 4 = 0$$

Решение.

Тут у нас два слагаемых с неизвестными. Давайте сначала приведем их к одинаковому основанию:

$$9 = 3^2$$

Значит:

$$9^x = (3^2)^x = 3^{2x}$$

$$3^{2x} + 3^{x+1} - 4 = 0$$

Чтобы увидеть замену, воспользуемся свойствами степени:

$$3^{2x} = (3^x)^2$$

$$3^{x+1} = 3^x \cdot 3$$

Теперь видно, какую замену нужно сделать:

$$3^x = t$$

Тогда:

$$3^{2x} = t^2$$

$$3^{x+1} = 3t$$

Получаем квадратное уравнение:

$$t^2 + 3t - 4 = 0$$

Решая его, получаем:

$$\left[\begin{array}{l} t = -4 \\ t = 1 \end{array}\right.$$

Делаем обратную замену:

$$\left[\begin{array}{l} 3^x = -4 \\ 3^x = 1 \end{array}\right.$$

В первом уравнении:

$$3^x = 3^0$$

$$x = 0$$

Второе уравнение не имеет решений, поскольку показательные выражение могут быть только положительными.

Ответ: 0.

Еще раз обратим внимание, как мы преобразовали выражение 9^x:

$$9^x = (3^2)^x = 3^{2x} = (3^x)^2$$

Такой прием достаточно распространен в показательных уравнениях, поэтому можете запомнить его.

С помощью замены можно решать и неравенства.

Задание. Решить неравенство:

$$4^x + 4^{-x+1} > 5$$

Решение.

Чтобы увидеть замену, преобразуем 4^{-x+1}, используя свойства степеней:

$$4^{-x+1} = 4^{-x} \cdot 4 = \frac{1}{4^x} \cdot 4 = \frac{4}{4^x}$$

Теперь видно замену:

$$4^x = t$$

Тогда:

$$4^{-x+1} = \frac{4}{t}$$

Получаем неравенство:

$$t + \frac{4}{t} > 5$$

Получили дробно-рациональное неравенство. Вы уже знаете, как решать такие неравенства. Попробуйте решить его самостоятельно, свериться можно ниже.

Решение дробно-рационального неравенства

Задание. Решить неравенство:

$$t + \frac{4}{t} > 5$$

Решение.

Решим неравенство методом интервалов. Для этого перенесем все слагаемые в одну сторону:

$$t + \frac{4}{t} - 5 > 0$$

И решим соответствующее уравнение:

$$t + \frac{4}{t} - 5 = 0$$

ОДЗ:

$$t \neq 0$$

Умножаем обе части равенства на t:

$$t^2 - 5t + 4 = 0$$

По теореме Виета корни уравнения:

$$\left[\begin{array}{l} t_1 = 1 \\ t_2 = 4 \end{array}\right.$$

Расставляем особые точки ОДЗ и корни на оси (см. рис. 1).

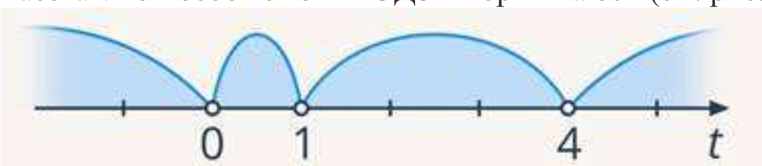

Рис. 1. Иллюстрация к заданию

Методом пробной точки определяем знаки на интервалах (см. рис. 2):

$t = 5$:

$$5 + \frac{4}{5} - 5 = \frac{4}{5}$$

Знак $«+»$.

$t = 3$:

$3+\frac{4}{3}-5=-\frac{2}{3}$

Знак «$-$».

$t=0{,}5$:

$0{,}5+\frac{4}{0{,}5}-5=3{,}5$

Знак «$+$».

$t=-1$:

$-1+\frac{4}{-1}-5=-10$

Знак «$-$».

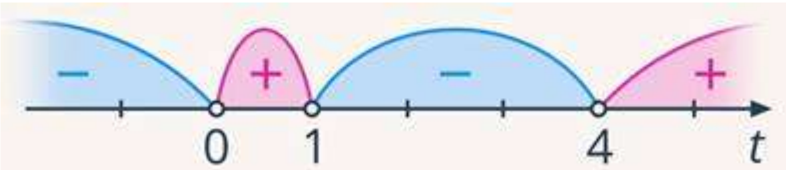

Рис. 2. Иллюстрация к заданию

Выбираем интервалы со знаком «$+$»:

$0<t<1; t>4$

Ответ: $(0;1)\cup(4;+\infty)$.

Решив неравенство, получаем:

$$\left[\begin{array}{l}0<t<1\\ \quad t>4\end{array}\right.$$

Делаем обратную замену:

$$\left[\begin{array}{l}0<4^x<1\\ \quad 4^x>4\end{array}\right.$$

Решим каждом по отдельности:

$4^x>0$ выполняется автоматически (вспомните почему). Тогда первое неравенство превращается в $4^x<1$. Решаем его:

$4^x<4^0$

$x<0$

Второе неравенство:

$4^x>4$

$4^x>4^1$

$x>1$

Получаем:

$$\left[\begin{array}{l}x<0\\ x>1\end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty;0)\cup(1;\infty)$.

Показательные уравнения повышенной сложности

Давайте рассмотрим более сложные примеры показательных уравнений.

Задание. Решить уравнение:

$$\left(\frac{3}{7}\right)^{\sin 2x}+\left(\frac{7}{3}\right)^{\sin 2x}=2$$

Решение.

Мы видим похожие выражение, но основания их – обратные дроби. Значит, можем записать:
$$\frac{7}{3}=\left(\frac{3}{7}\right)^{-1}$$
Тогда можем применить прием, о котором мы говорили ранее:
$$\left(\frac{7}{3}\right)^{\sin 2x}=\left(\left(\frac{3}{7}\right)^{-1}\right)^{\sin 2x}=\left(\frac{3}{7}\right)^{-1\sin 2x}=\left(\left(\frac{3}{7}\right)^{\sin 2x}\right)^{-1}$$
Можем сделать замену:
$$\left(\frac{3}{7}\right)^{\sin 2x}=t$$
Тогда:
$$\left(\frac{7}{3}\right)^{\sin 2x}=t^{-1}$$
Получаем уравнение:
$$t+t^{-1}=2$$
$$t+\frac{1}{t}=2$$
ОДЗ:
$$t\neq 0$$
Умножаем обе части на t:
$$t^2+1=2t$$
Решая это уравнение, получаем единственный корень $t=1$. Делаем обратную замену:
$$\left(\frac{3}{7}\right)^{\sin 2x}=1$$
Хоть у нас в показателе и стоит синус, принцип неизменный: приводим обе части уравнения к одному основанию:
$$\left(\frac{3}{7}\right)^{\sin 2x}=\left(\frac{3}{7}\right)^{0}$$
Основания равны, следовательно $\sin 2x=0$. Как видите, вся сложность состоит лишь в том, что в итоге мы получили не линейное или квадратное уравнение, а тригонометрическое. Но и их мы уже умеем решать:
$$\sin 2x=0$$
$$2x=\pi k, k\in Z$$
$$x=\frac{\pi k}{2}, k\in Z$$
Ответ: $\frac{\pi k}{2}, k\in Z$.

Есть еще один тип показательных уравнений, которые решаются заменой. Это однородные уравнения. С подобным типом мы уже сталкивались ранее, например, в тригонометрии. Показательные однородные уравнения похожи на них: у них также должна быть одинаковая степень у всех слагаемых, а в правой части – стоять ноль.

Задание. Решить уравнение:
$$9^x+7\cdot 6^x-8\cdot 4^x=0$$
Решение.
Для начала, как и во всех показательных уравнениях, попробуем привести степени к одинаковым основаниям, разложив имеющиеся основания на простые множители:

$9^x = 3^{2x}$

$6^x = 3^x \cdot 2^x$

$4^x = 2^{2x}$

Получаем:

$3^{2x} + 7 \cdot 3^x \cdot 2^x - 8 \cdot 2^{2x} = 0$

Видим, что это однородное уравнение: у слагаемых степени одинаковы: $2x$, справа в уравнении стоит 0. Идея решения похожа у всех однородных уравнений: делим на 2^{2x}. Это выражение не равно нулю, имеем право делить. Получим:

$$\frac{3^{2x}}{2^{2x}} + \frac{7 \cdot 3^x \cdot 2^x}{2^{2x}} - 8 = 0$$

Или, применив свойства степеней:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{2x} + 7 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x - 8 = 0$$

Теперь уже можем сделать замену:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^x = t$$

Тогда:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{2x} = t^2$$

Получаем квадратное уравнение:

$t^2 + 7t - 8 = 0$

Его корни:

$$\left[\begin{array}{l} t = -8 \\ t = 1 \end{array}\right.$$

Делаем обратную замену:

$$\left[\begin{array}{l} \left(\frac{3}{2}\right)^x = -8 \\ \left(\frac{3}{2}\right)^x = 1 \end{array}\right.$$

Первое уравнение не имеет решений, второй уравнение имеет корень $x = 0$.

Ответ: 0.

Логарифмические уравнения и неравенства повышенной сложности

Последнее, на что мы обратим наше внимание на сегодняшнем уроке, это более сложные логарифмические уравнения и неравенства.

Задание. Решить уравнение:

$\log_{x-2} 81 = 2$

Решение.

Вся сложность заключается лишь в том, что неизвестная стоит в основании логарифма, с этим мы еще не сталкивались. Но ничего страшного, действуем по обычному алгоритму.

Первое – указываем ОДЗ. Основание логарифма больше нуля и не равно 1. Т. е. ОДЗ: $x - 2 > 0;\ x - 2 \neq 1$. Приводим левую и правую части к одинаковому основанию. По свойству логарифма:

$2 = \log_{x-2}(x-2)^2$

Получаем:

$\log_{x-2} 81 = \log_{x-2}(x-2)^2$

Основания равны, значит:

$81 = (x-2)^2$

Получили квадратное уравнение, корни которого $x = 11$ и $x = -7$. Второй корень не входит в ОДЗ. Получаем ответ: $x = 11$.

Ответ: 11.

В неравенстве также может встретиться переменная в основании логарифма. Алгоритм решения при этом никак не изменится, но будет одно отличие – мы не будем знать, основание больше или меньше 1. А это, напомним, влияет на смену знака неравенства. Поэтому нужно будет рассмотреть два случая: когда основание больше и когда меньше 1. С примером решения подобного неравенства вы можете ознакомиться в ответвлении.

Неравенство с неизвестной в основании логарифма

Задание. Решить неравенство:

$\log_x(3x - 1) > 1$

Решение.

Для начал выпишем ОДЗ. Под логарифмом – положительная величина:

$3x - 1 > 0$

В основании логарифма – положительная величина не равная единице:

$x > 0; x \neq 1$

Переходим к решению. Представим левую часть неравенства в виде логарифма с основанием x:

$1 = \log_x x$

Получим:

$\log_x(3x - 1) > \log_x x$

Основание одинаковы. Но мы не знаем, больше они 1 или меньше. Рассматриваем 2 случая:

1. при $x > 1$ знак неравенства не изменится:

$3x - 1 > x$

Решая неравенство, получим:

$x > \frac{1}{2}$

Но в рассматриваемом случае $x > 1$, следовательно, останутся только значения $x > 1$ (см. рис. 1).

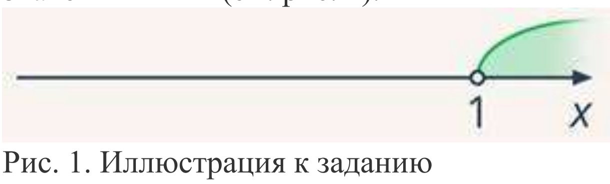

Рис. 1. Иллюстрация к заданию

2. при $x < 1$ знак неравенства изменится противоположный:

$3x - 1 < x$

Решая неравенство, получим:

$x < \frac{1}{2}$

Это соответствует нашему случаю, значит, все решения подойдут (см. рис. 2).

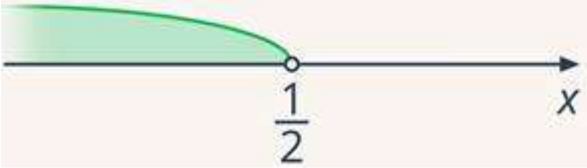

Рис. 2. Иллюстрация к заданию
В итоге получаем (см. рис. 3):
$$\left[\begin{array}{l} x > 1 \\ x < \frac{1}{2} \end{array}\right.$$

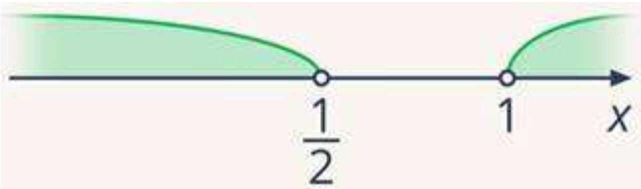

Рис. 3. Иллюстрация к заданию

Осталось учесть ОДЗ: $x > \frac{1}{3}; x > 0; x \neq 1$. Изобразим эти условие на оси и найдем пересечение ОДЗ с областью полученных решений (см. рис. 4).

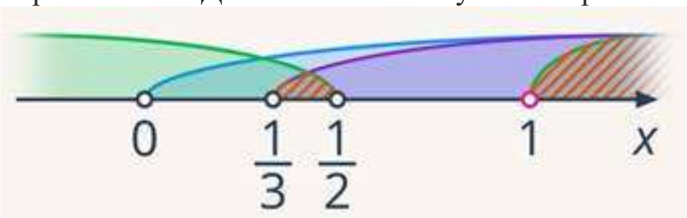

Рис. 4. Иллюстрация к заданию

Получаем ответ: $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right) \cup (1;\ \infty)$.

В конце урока разберем еще одно логарифмическое неравенство. Алгоритм его решения абсолютно такой же, как и в более простом примере, разобранном ранее: указываем ОДЗ, приводим к одному основанию и решаем полученную систему неравенств. Сложность данного примера будет заключаться лишь в количестве полученных неравенств в системе. Поэтому мы посмотрим, как их количество можно уменьшить и упростить решение.
Задание. Решить неравенство:
$$\log_{0,5}(x^2 + 2x - 13) \leq \log_{0,5}(x + 3) + \log_{0,5}(1 - x)$$
Решение.
ОДЗ:
$$x^2 + 2x - 13 > 0$$
$$x + 3 > 0$$
$$1 - x > 0$$
Приведем обе части к одному основанию. По свойству логарифмов:
$$\log_{0,5}(x + 3) + \log_{0,5}(1 - x) = \log_{0,5}\big((x + 3)(1 - x)\big)$$
Получаем неравенство:
$$\log_{0,5}(x^2 + 2x - 13) \leq \log_{0,5}\big((x + 3)(1 - x)\big)$$
Основание логарифмов равны и меньше 1. Записываем неравенство для подлогарифмических выражений и меняем знак неравенства:
$$x^2 + 2x - 13 \geq (x + 3)(1 - x)$$
С учетом ОДЗ получаем систему неравенств:
$$\begin{cases} x^2 + 2x - 13 \geq (x + 3)(1 - x) \\ x^2 + 2x - 13 > 0 \\ x + 3 > 0 \\ 1 - x > 0 \end{cases}$$
Осталось решить эту систему. Можно решать каждое по отдельности. А можно и облегчить себе задачу: $x + 3 > 0$, $1 - x > 0$, значит, их произведение также

положительное. А из первого неравенства мы знаем, что $x^2 + 2x - 13$ больше либо равно этому произведению. Значит, оно тоже точно положительно. Получается, второе неравенство автоматически выполняется, если верны 1, 3 и 4 неравенства. Значит, можем его не рассматривать. Остается система из трех неравенств:

$$\begin{cases} x^2 + 2x - 13 \geq (x+3)(1-x) \\ x + 3 > 0 \\ 1 - x > 0 \end{cases}$$

Их уже придется решать. Попробуйте сделать это самостоятельно, проверить себя можно ниже.

Решение системы неравенств

Задание. Решить систему неравенств:

$$\begin{cases} x^2 + 2x - 13 \geq (x+3)(1-x) \\ x + 3 > 0 \\ 1 - x > 0 \end{cases}$$

Решение.

Решим первое неравенство:

$x^2 + 2x - 13 \geq (x+3)(1-x)$

Раскроем скобки и перенесем все слагаемые в левую сторону

$x^2 + 2x - 13 \geq -x^2 - 2x + 3$

$2x^2 + 4x - 16 \geq 0$

Разделим на 2:

$x^2 + 2x - 8 \geq 0$

Решим полученное неравенство методом интервалов:

$x^2 + 2x - 8 = 0$

По теореме Виета:

$$\left[\begin{array}{l} x = -4 \\ x = 2 \end{array}\right.$$

Расставим точки на оси (см. рис. 1).

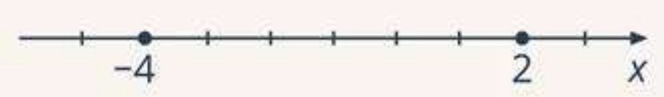

Рис. 1. Иллюстрация к заданию

Это квадратичный многочлен с положительным коэффициентом при x^2, значит, знаки на интервалах будут «+» «−» «+» (см. рис. 2).

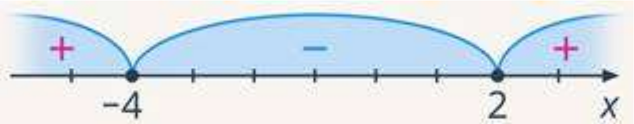

Рис. 2. Иллюстрация к заданию

Выберем нужные интервалы (см. рис. 3).

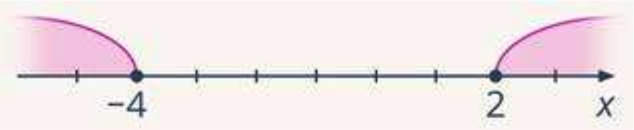

Рис. 3. Иллюстрация к заданию

На этой же оси отметим решения двух остальных неравенств (см. рис. 4):

$x + 3 > 0$, значит:

$x > -3$

$1 - x > 0$, значит:

$x < 1$

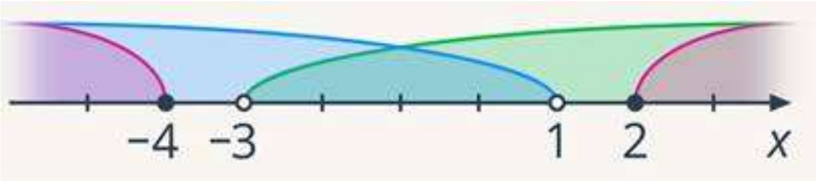

Рис. 4. Иллюстрация к заданию

Видим, что пересечений у всех трех решений нет. Значит, система не имеет решений.

Ответ: $\varnothing$.