УВАЖАЕМЫЕ СТУДЕНТЫ! Изучите и законспектируйте новый теоретический материал тезисно по плану лекции.

Решите упражнения к лекции.

Результаты работы, фотоотчет, предоставить преподавателю на e-mail: xvsviv@rambler.ru в трехдневный срок с момента получения задания.

При возникновении вопросов по приведенному материалу обращаться по следующим номерам телефонов:072-138-93-11.

ВНИМАНИЕ!!! При отправке работы, не забывайте указывать ФИО студента, наименование дисциплины, дата проведения занятия (по расписанию).

***Тема занятия:* «Первообразная и интеграл. Неопределенный интеграл».**

Лекция рассчитана на 4 часа

Цели занятия:

Образовательная: Сформировать представления об интегральном исчислении, уяснить его суть. Выработать навыки нахождения неопределенного интеграла и первообразных, умения пользоваться свойствами и методами интегрирования.

Развивающая: Развивать математически грамотную речь, внимание, сознательное восприятие учебного материала.

Воспитательная: Воспитывать познавательную активность, сообразительность и мышление, благодарность к достижению великих математиков в области интегрирования.

Вид занятия: лекция

Тип занятия: сообщения новых знаний

Квалификационные требования:

Обучающиеся должны:

В ходе изучения темы «*Первообразная и интеграл*» обучающимся **предстоит усвоить** основные понятия и утверждения, **иметь представления** о возможностях применения средств интегрального исчисления в геометрических, физических и других прикладных задачах.

Знать:

 определение первообразной функции и неопределенного интеграла;

 свойства и методы нахождения интегралов

 формулы простейших интегралов.

Уметь:

Δ вычислять первообразные и неопределенный интеграл, используя основные свойства и методы нахождения.

Междисциплинарные связи: физика, история математики.

Внутридисциплинарные связи: «Нахождение производной», «Вычисление объемов тел», «Вычисление определенного интеграла».

Тема: ««Первообразная и интеграл. Неопределенный интеграл»»

План

1. Из истории интегрального исчисления. О происхождении терминов и обозначений.

2. Определение первообразной, её основное свойство, правила нахождения первообразных.

3. Понятие неопределенного интеграла, его свойства.

4. Таблица простейших интегралов.

1. История понятия интеграла тесно связана с задачами нахождения квадратур. Задачами о квадратуре той или иной плоской фигуры математики Древней Греции и Рима называли задачами, которые мы сейчас относим к задачам на вычисление площадей.

Многие значительные достижения математиков Древней Греции в решении таких задач связаны с применением метода исчерпывания, предложенным Евдоксом Книдским. С помощью этого метода Евдокс доказал:

– Площади двух кругов относятся как квадраты их диаметров.

– Объём конуса равен 1/3 объёма цилиндра, имеющего такие же высоту и основание.

Метод Евдокса был усовершенствован Архимедом и были доказаны такие вещи:

– Вывод формулы площади круга.

– Объем шара равен 2/3 объема цилиндра.

Все достижения были доказаны великими математиками с применением интегралов.

Символ $\int$ введен Лейбницем в 1675 г. Этот знак является изменением латинской буквы S. Само слово «*интеграл*» придумано Бернулли в 1690 г. Оно происходит от латинского integro, которое переводится, как приводить в прежнее состояние, восстанавливать. Действительно, операция интегрирования обратная операции дифференцирования т.е. для того, чтобы проверить правильность нахождения интеграла необходимо продифференцировать ответ и получить подынтегральную функцию. Другими словами, интегральное исчисление решает задачу: по заданной производной или дифференциалу неизвестной функции требуется определить эту функцию. Отсюда можно сделать вывод, который мы запишем в виде определения.

Определение 1: *Функция F(x) называется первообразной для функции f(x) на отрезке* [a;b], *если во всех точках этого отрезка выполняется равенство* $F'(x) = f(x)$ *или* $dF(x)=f(x)dx$

Так, функция $F(x) = x^m$ является первообразной для $f(x)=mx^{m-1}$, так как

$$(x^m)'=mx^{m-1}.$$

Точно также функция F(x) =ln x есть первообразная для $f(x)=\frac{1}{x}$, так как

$$(\ln x)'=\frac{1}{x}.$$

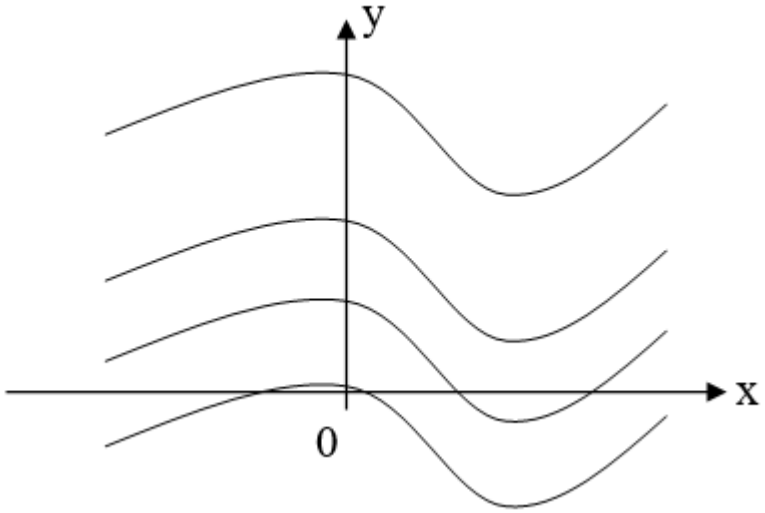
Признак постоянства функции:

Если F’(x)=0 на некотором промежутке I, то функция F – постоянна на этом промежутке, т.е. F(x)=C.

Все первообразные функции f можно записать в одну формулу, которую называют общим видом первообразных для функции f. Запишем это в виде теоремы.

Теорема: *Любая первообразная для функции f на промежутке I может быть записана в виде F(x)+C, где F(x) – одна из первообразных для функции f(x) на промежутке I, C – произвольная постоянная.*

Этому свойству можно придать геометрический смысл: графики любых двух первообразных для функции f получаются друг из друга параллельным переносом вдоль оси Oy.



Три правила нахождения первообразных

Правило №1: Если F есть первообразная для функции f, а G – первообразная для g, то F+G – есть первообразная для f+g.

$$(F(x) + G(x))' = F'(x) + G'(x) = f + g$$

Правило №2: Если F – первообразная для f, а k – постоянная, то функция kF – первообразная для kf.

$$(kF)' = kF' = kf$$

Правило №3: Если F – первообразная для f, а k и b– постоянные ($k \neq 0$), то функция

$\frac{1}{k}F(kx+b)$ - первообразная для f(kx+b).

$$\left(\frac{1}{k}F(kx+b)\right)' = \frac{1}{k}F'(kx+b)k = f(kx+b)$$

3. Вернемся к теореме 1 и выведем новое определение.

Определение 2: *Выражение F(x) + C, где C – произвольная постоянная, называют неопределенным интегралом и обозначают символом*

$$\int f(x)dx$$

Из определения имеем:

$$\int f(x)dx = F(x) + C \qquad (1)$$

Неопределенный интеграл функции f(x), таким образом, представляет собой множество всех первообразных функций для f(x).

В равенстве (1) функцию f(x) называется *подынтегральной функцией*, а выражение f(x)dx– *подынтегральным выражением*, переменную x – *переменной интегрирования*, слагаемое C - *постоянной интегрирования*.

Интегрирование представляет собой операцию, обратную дифференцированию. Для того чтобы проверить, правильно ли выполнено интегрирование, достаточно продифференцировать результат и получить при этом подынтегральную функцию.

Свойства неопределенного интеграла.

Опираясь на определение первообразной, легко доказать следующие *свойства неопределенного интеграла*

1. Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции, то есть если $F'(x)$ = f(x), то

$$\left(\int f(x)dx\right)' = \left(F(x)+C\right)' = f(x)$$

2. Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению

$$d\int f(x)dx = \left(\int f(x)dx\right)'dx = \left(F(x)+C\right)'dx = f(x)dx$$

3. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен этой функции плюс произвольная постоянная

$$\int dF(x) = \int f(x)dx = F(x)+C$$

4. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы двух или нескольких функций равен алгебраической сумме их интегралов

$$\int\left[f_1(x)+f_2(x)\right]dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx$$

5. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла, то есть если a=const, то

$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx$$

4. ***Таблица простейших интегралов***

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ *,(n ≠ -1)*

2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

4. $\int e^x dx = e^x + C$

5. $\int \cos x dx = \sin x + C$

6. $\int \sin x dx = -\cos x + C$

Интегралы, содержащиеся в этой таблице, принято называть *табличными*. Отметим частный случай формулы 1:

$$\int 1\cdot dx = x + C \quad при n = 0 \qquad\qquad \int x dx = \frac{x^2}{2} + C \quad при n = 1$$

Приведем еще одну очевидную формулу:

$$\int 0\cdot dx = C,$$

т. е. первообразная от функции, тождественно равной нулю, есть постоянная.

Примеры решения типовых заданий на неопределенный интеграл:

Найти интегралы: а) $\int\left(3\cos x - 4x^2 + \frac{1}{x} + 5\right)dx$; б) $\int \frac{dx}{4x^2+25}$.

Решение.

а) $\int\left(3\cos x - 4x^2 + \frac{1}{x} + 5\right)dx = 3\int \cos x dx - 4\int x^2 dx + \int \frac{1}{x}dx + 5\int dx =$

$= 3\sin x - \frac{4x^3}{3} + \ln x + 5x + C$.

б) $\int \frac{dx}{4x^2+25} = \frac{1}{4}\cdot\int \frac{dx}{x^2+\left(\frac{5}{2}\right)^2} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\frac{5}{2}}\cdot arctg\frac{x}{\frac{5}{2}} + C = \frac{1}{10}arctg\frac{2x}{5} + C.$

Установить соответствие между функцией и первообразной

Функция	Первообразная
$\int\left(3x^2 - 6x\right)dx =$	$= x^3 - 3x^2 + C$
Функция	Первообразная
$\int\left(e^x + x^2\right)dx =$	$= e^x + \frac{x^3}{3} + C$
Функция	Первообразная
$\int\left(1 + \sin x\right)dx =$	$= x - \cos x + C$

Функция	Первообразная
$\int\left(\frac{1}{x}+x\right)dx=$	$=\ln x+\frac{x^2}{2}+C$
Функция	Первообразная
$\int\left(2^x+\cos x\right)dx=$	$=\frac{2^x}{\ln 2}+\sin x+C$
Функция	Первообразная
$\int\left(x^3+e^x\right)dx=$	$=\frac{x^4}{4}+e^x+C$
Функция	Первообразная
$\int\left(2+\sin x\right)dx=$	$=2x-\cos x+C$
Функция	Первообразная
$\int\left(x+3\right)dx=$	$=\frac{x^2}{2}+3x+C$