УВАЖАЕМЫЕ СТУДЕНТЫ! Изучите приведенную лекцию в своей рабочей тетради, законспектируйте основные тезисы, типовые задачи по теме. Обязательно решить задания к лекции.

Результаты работы, фотоотчет, предоставить преподавателю на e-mail: xvsviv@rambler.ru

ВНИМАНИЕ!!! При отправке работы, не забывайте указывать ФИО студента, наименование дисциплины, дата проведения занятия (по расписанию).

Определенный интеграл. Формула Ньютона-Лейбница.

Цель занятия:

Образовательная - сформировать понятие определенного интеграла, отработать навыки вычисления определенного интеграла; ввести формулу Ньютона-Лейбница, рассмотреть свойства определенного интеграла.

Развивающая - создать условия для развития мышления (умения строить аналогии, систематизировать и обобщать), развить познавательный интерес.

Воспитательная - воспитать осознанное отношение к учебной деятельности.

Определённым интегралом от непрерывной функции $f(x)$ на конечном отрезке $[a, b]$ (где $a \neq b$) называется приращение какой-нибудь её первообразной на этом отрезке. При этом употребляется запись

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Как видно на графиках (приращение первообразной функции обозначено ΔF), **определённый интеграл может быть как положительным, так и отрицательным числом** (Вычисляется как разность между значением первообразной в верхнем пределе и её же значением в нижнем пределе, т. е. как $F(b) - F(a)$).

Числа a и b называются соответственно **нижним** и **верхним пределами интегрирования**, а отрезок $[a, b]$ – **отрезком интегрирования**.

Таким образом, если $F(x)$ – какая-нибудь первообразная функция для $f(x)$, то, согласно определению,

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Это равенство называется ***формулой Ньютона-Лейбница***.

Разность $F(b) – F(a)$ кратко записывают так:

$$F(x)\Big|_a^b.$$

Поэтому формулу Ньютона-Лейбница будем записывать и так:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b.$$

Таким образом, для вычисления определённого интеграла необходимо найти любую первообразную подынтегральной функции, т.е. сначала следует найти неопределённый интеграл. *Постоянная C из последующих вычислений исключается*. Затем применяется формула Ньютона-Лейбница: в первообразную функцию подставляется значение верхнего предела *b*, далее - значение нижнего предела *a* и вычисляется разность *F(b) - F(a)*. Полученное число и будет определённым интегралом.

При *a* = *b* по определению принимается

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

Свойства определённого интеграла

Свойство 1. *Определённый интеграл с одинаковыми пределами интегрирования равен нулю*, т.е.

$$\int_a^a f(x)\ dx = 0.$$

Свойство 2. *Величина определённого интеграла не зависит от обозначения переменной интегрирования*, т.е.

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^b f(t)\ dt.$$

Свойство 3. *Постоянный множитель можно выносить за знак определённого интеграла*, т.е.

$$\int_a^b kf(x)\ dx = k\int_a^b f(x)\ dx.$$

Свойство 4. *Определённый интеграл от алгебраической суммы конечного числа функций равен алгебраической сумме определённых интегралов от этих функций*, т.е.

$$\int_a^b \left[f(x) + \varphi(x) - \psi(x)\,dx\right] =$$

$$= \int_a^b f(x)\ dx + \int_a^b \varphi(x)\ dx - \int_a^b \psi(x)\ dx.$$

Свойство 5. *Если отрезок интегрирования разбит на части, то определённый интеграл по всему отрезку равен сумме определённых*

интегралов по его частям, т.е. если $c \in [a,b]$, то $\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b f(x)\ dx.$

Свойство 6. *При перестановке пределов интегрирования абсолютная величина определённого интеграла не меняется (т.е. по модулю), а изменяется лишь его знак*, т.е.

$$\int_b^a f(x)\ dx = -\int_a^b f(x)\ dx.$$

Свойства определённого интеграла позволяют упрощать непосредственное вычисление интегралов.

Пример 1

Вычислить определенный интеграл

$$\int_1^2 2x^2 dx$$

Решение:

$$\int_1^2 2x^2 dx \overset{(1)}{=} 2\int_1^2 x^2 dx \overset{(2)}{=} \frac{2}{3}(x^3)\Big|_1^2 \overset{(3)}{=} \frac{2}{3}(2^3 - 1^3) = \frac{2}{3}(8-1) = \frac{2}{3}\cdot 7 = \frac{14}{3} = 4\frac{2}{3}$$

Пример 2:

$$\int_1^5 \frac{7dx}{x} = 7\int_1^5 \frac{dx}{x} = 7(\ln\ x)\Big|_1^5 = 7(\ln\ 5 - \ln\ 1) = 7(\ln\ 5 - 0) = 7\ln\ 5$$

Пример 3

Вычислить определенный интеграл

$$\int_{-2}^4 (8 + 2x - x^2)dx$$

Решение:

$$\int_{-2}^4 (8 + 2x - x^2)dx = 8\int_{-2}^4 dx + 2\int_{-2}^4 xdx - \int_{-2}^4 x^2\, dx = (8x + 2\cdot\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3)\Big|_{-2}^4 = \left(8\cdot 4 + 4^2 - \frac{1}{3}\cdot 4^3\right) - \left(8\cdot(-2) + (-2)^2 - \frac{1}{3}\cdot(-2)^3\right) =$$

$$= 32 + 16 - \frac{64}{3} - \left(-16 + 4 + \frac{8}{3}\right) = 32 + 16 + 16 - 4 - \frac{64}{3} - \frac{8}{3} = 36$$

Пример 4

$$\int_{-3}^{1}(2x^2+3x-1)dx=\left(\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2-x\right)\Big|_{-3}^{1}=$$

$$=\frac{2}{3}+\frac{3}{2}-1-\left(-18+\frac{27}{2}+3\right)=\frac{7}{6}+\frac{3}{2}=\frac{8}{3}=2\frac{2}{3}$$

Задание для самостоятельного решения:

1. Вычислите интеграл $\int_{-1}^{0}x^5dx$.
2. Вычислите интеграл $\int_{-1}^{1}x^6dx$.
3. Вычислите интеграл $\int_{1}^{2}\frac{16dx}{x^3}$.
4. Вычислите интеграл $\int_{1}^{2}\frac{24dx}{x^2}$.
5. Вычислите интеграл $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin xdx$.
6. Вычислите интеграл $\int_{0}^{\pi}\cos xdx$.
7. Вычислить интеграл $\int_{0}^{3}(6x^2+2x-1)dx$
8. Вычислить интеграл $\int_{2}^{3}(x^3+5+2x)dx$