Задание:

- Повторить теорию;
- Разобрать примеры решения;
- Решить примеры для самостоятельного решения;
- По вопросам обращаться 072-1098278 или hvastov@rambler.ru
- Отчет о работе должен содержать тему и цель практического занятия
- Фотоотчёт прислать в течении 3 дней со дня получения задания на hvastov@rambler.ru

Лекция по теме: «Дифференциал функции, его геометрический смысл и приложения к приближенным вычислениям Вторая производная, ее механический смысл»

(2 пары)

План:

1) Производная, ее физический смысл

2) Вторая производная

3) Нахождение второй производной

4) Механический смысл производной

Понятие производной является одним из фундаментальных понятий математики. Многие задачи как самой математики, так и естествознания техники приводят к этому понятию.

Пусть функция $y = f(x)$ определена в промежутке X. Возьмем из этого промежутка фиксированное значение аргумента x и придадим ему приращение Δx так, чтобы новое значение аргумента $x + \Delta x$ принадлежало этому промежутку. Тогда значение функции $f(x)$ заменится новым значением $f(x) + \Delta y = f(x + \Delta x)$, то есть функция получит приращение $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.

Предел отношения приращения функции Δy к вызвавшему его приращению аргумента Δx при стремлении Δx к нулю, то есть

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

Называется производной функции $y = f(x)$ по аргументу x в точке x.

Производная обозначается одним из символов: y'_x, y', $f'(x)$, $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}$

Операция нахождения производной называется *дифференцированием.*

Физический смысл производной. Если тело движется по прямой по закону $s = s(t)$, то за промежуток времени Δt (от момента t до момента t + Δt) оно пройдет некоторый путь Δs. Тогда $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ есть средняя скорость движения за промежуток времени Δt.

Скорость движения тела в данный момент времени t называется предел отношения приращения пути Δs к приращению времени Δt, когда приращение времени стремится к нулю: $v(t) = \lim v_{cp} = \lim \frac{\Delta s}{\Delta t}$.

Следовательно, производная пути s по времени t равна скорости прямолинейного движения тела в данный момент времени: $v(t) = s_t$.

Скорость протекания физических, химических и других процессов также выражается с помощью производной.

Производная функции $y = f(x)$ равна скорости изменения этой функции при данном значении аргумента x: $v(x) = y' = \lim \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Пример 10. Закон движения точки по прямой задан формулой $s = 5t^3 - 3t^2 + 4$ (s – в метрах, t – в секундах). Найти скорость движения точки в конце первой секунды.

Решение. Скорость движения точки в данный момент времени равна производной пути s по времени t: $v(t) = s' = 15t^2 - 6t$, $v(1) = 15 - 6 = 9$.

Итак, скорость движения точки в конце первой секунды равна 9 м/с.

Вторая производная. Производная функции $y = f(x)$ в общем случае является функцией от x. Если от этой функции вычислить производную, то получим производную второго порядка или вторую производную функции $y = f(x)$.

Второй производной функции $y = f(x)$ называется производная от ее первой производной $(y')' = y''$.

Аналогично определяются и обозначаются производные любого порядка. Например, производная третьего порядка: $(y'')' = y'''$ *или* $f'''(x), \frac{d^3y}{dx^3}$.

Пример 12. Найти вторую производную функции $f(x) = e^{\sin x}$.

Решение. Сначала найдем первую производную:

$f'(x)=e^{\sin x}(\sin x)' = e^{\sin x}\cos x$.

Дифференцируя еще раз, найдем вторую производную:

$f''(x) = e^{\sin x}(\cos x)' + (e^{\sin x})'\cos x = e^{\sin x}(-\sin x) + e^{\sin x}\cos x \cdot \cos x = e^{\sin x}(\cos^2 x - \sin x)$.

Пример 13. Найти вторую производную функции $y = \frac{x^2+1}{x-1}$ и вычислить ее значение при x = 2.

Решение. Сначала найдем первую производную:

$$y' = \frac{(x-1)(x^2+1)' - (x-1)'(x^2+1)}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)2x - (x^2+1)}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 2x - x^2 - 1}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2}.$$

Дифференцируя еще раз, найдем вторую производную:

$$y'' = \frac{(x-1)^2(x^2-2x-1)' - ((x-1)^2)'(x^2-2x-1)}{(x-1)^4} = \frac{(x-1)^2(2x-2) - 2(x-1)(x^2-2x-1)}{(x-1)^4} =$$

$$= \frac{(x-1)(2(x-1)^2 - 2(x^2-2x-1))}{(x-1)^4} = \frac{2(x^2-2x+1-x^2+2x+1)}{(x-1)^3} = \frac{2\cdot 2}{(x-1)^3} = \frac{4}{(x-1)^3}.$$

Вычислим значение второй производной при $x = 2$;

Имеем $y''(2) = 4/(2-1)^3 = 4/1 = 4$.

Механический смысл второй производной. Если тело движется по прямой по закону $s = s(t)$, то вторая производная пути s по времени t равна ускорению движения тела в данный момент времени t: $a(t)=v'=s''$.

Таким образом, первая производная характеризует скорость некоторого процесса, а вторая производная – ускорение того же процесса.

Пример 14. Точка движется по прямой по закону $s = t - \sin t$. Найти скорость и ускорение движения при $t = \pi/2$.

Решение. Скорость движения тела в данный момент времени равна производной пути s по времени t, а ускорение – второй производной пути s по времени t.

Находим: v(t) = s′ = 1 – cos t; тогда $v\left(\frac{\pi}{2}\right)=1-\cos\frac{\pi}{2}=1;$

$a(t)=s''=-(-\sin t)=\sin t;$ тогда $a\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sin\frac{\pi}{2}=1.$

Пример 15. Скорость прямолинейного движения пропорциональная квадратному корню из пройденного пути (как, например, при свободном падении). Доказать, что это движение происходит под действием постоянной силы.

Решение. По закону Ньютона, сила F, вызывающая движение, пропорциональна ускорению, то есть F = k·a(t) или F= k·s′′(t).

Согласно условию, $v(t) = s'(t) = \lambda\sqrt{s}.$ Дифференцируя это равенство, найдем

$$a(t)=s''=\frac{\lambda}{2\sqrt{s}}s'(t)=\frac{\lambda}{2\sqrt{s}}\lambda\sqrt{s}=\frac{\lambda^2}{2}.$$

Следовательно, действующая сила $F=\frac{k\cdot\lambda^2}{2}=const.$

Контрольные вопросы:
1) Что называется производной?
2) Как найти вторую производную?
3) В чем заключается физический смысл производной?
4) В чем заключается механический смысл второй производной?
5) Найдите вторую производную функции:

$а)\ s=\sqrt{t};\quad б)\ y=\ln\sin x;\quad в)\ y=\cos^2 x.$

6) Тело движется прямолинейно по закону $s=-\frac{1}{6}t^3+3t^2-5$ (s – в метрах, t – в секундах). Найдите скорость движения в тот момент времени, когда ускорение равно нулю.