Уважаемые студенты!

Вам необходимо изучить теоретический материал, рассмотреть решение примеров, выполнить упражнения для самостоятельной работы и ответить на контрольные вопросы.

Ответ присылать на электронную почту: *hvastov@rambler.ru*

Лекция

Тема: Неопределенный интеграл. Основные свойства неопределенного интеграла. Основные методы интегрирования.

План.

1.Основные правила интегрирования.

2. Основные формулы интегрирования (табличные интегралы).

3.Метод непосредственного интегрирования.

4. Метод замены переменной (метод подстановки

1.Неопределенный интеграл и его свойства.

Определение 1. Функция F называется первообразной функции $f(x)$ на некотором промежутке X, если для любого $x \in X$ функция $F(x)$ дифференцируема и выполняется равенство: $F'(x) = f(x)$ Например, функция $F(x) = \frac{1}{5}x^5 + 2$ есть первообразной функции $f(x) = x^4$ на R, т.к. $\left(\frac{1}{5}x^5 + 2\right)' = x^4$ Определение 2. Совокупность всех первообразных функций для функции $f(x)$ на промежутке X называется неопределенным интегралом от функции $f(x)$ на этом промежутке и обозначается $\int f(x)dx$, т.е. $\int f(x)dx = F(x) + C$, где C – произвольная постоянная, функция f называется подинтегральной функцией, $f(x)dx$ – подинтегральным выражением. Операция нахождения неопределенного интеграла функции называется ее интегрированием. Переменная x называется переменной интегрирования.

Основные правила интегрирования.

Теорема1. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы функций равняется сумме неопределенных интегралов от этих функций:

$$\int [f_1(x) \pm f_2(x)]dx = \int f_1(x)\,dx \pm \int f_2(x)\,dx.$$

Теорема 2. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла, т.е. если $C = const$, то

$$\int Cf(x)\,dx = C\int f(x)\,dx.$$

2. Основные формулы интегрирования (табличные интегралы).

1. $\int 0dx = C, C - const$;
2. $\int dx = x + C$;
3. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C, (n \neq -1)$;
4. $\int \dfrac{1}{x}dx = \int \dfrac{dx}{x} = \int x^{-1}dx = \ln|x| + C$;
5. $\int \dfrac{1}{x^n}dx = \int \dfrac{dx}{x^n} = \int x^{n-1}dx = -\dfrac{1}{n-1}\cdot\dfrac{1}{x^{n-1}} + C = -\dfrac{1}{(n-1)\cdot x^{n-1}} + C$;
6. $\int \dfrac{1}{x^2}dx = \int \dfrac{dx}{x^2} = \int x^{-2}dx = -\dfrac{1}{x} + C$;
7. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$;
8. $\int e^x dx = e^x + C$;
24. $\int e^{kx}dx = \dfrac{1}{k}e^{kx} + C$;
9. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$;
25. $\int a^{kx}dx = \dfrac{1}{k}\cdot\dfrac{a^{kx}}{\ln a} + C$;
10. $\int \sin xdx = -\cos x + C$;
26. $\int \sin kxdx = -\dfrac{1}{k}\cos kx + C$;
11. $\int \cos xdx = \sin x + C$;
27. $\int \cos kxdx = \dfrac{1}{k}\sin kx + C$;
12. $\int tgxdx = -\ln|\cos x| + C$;
13. $\int ctgdx = \ln|\sin x| + C$;
14. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$;
28. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 kx} = \dfrac{1}{k}tgkx + C$;
15. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$;
29. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 kx} = -\dfrac{1}{k}ctgkx + C$;

16. $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C$;

17. $\int \frac{dx}{1-x^2} = -arcctgx + C$;

18. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$;

19. $\int \frac{dx}{-\sqrt{1-x^2}} = \arccos x + C$;

20. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$;

21. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arcctg \frac{x}{a} + C$;

22. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$;

23. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$;30. $\int \frac{dx}{\sin^2 kx} = -\frac{1}{k} ctgkx + C$.

3. Метод непосредственного интегрирования.

Непосредственное интегрирование основано на прямом использовании таблицы интегралов. Здесь могут представиться следующие случаи:

1) данный интеграл находится непосредственно по соответствующему табличному интегралу;

2) данный интеграл после применения свойств непосредственного интеграла приводится к одному или нескольким табличным интегралам;

3) данный интеграл после элементарных тождественных преобразований над подынтегральной функцией и применяя свойства неопределенного интеграла приводится к одному или нескольким табличным интегралам.

Пример 1. Найти интеграл $\int (5x\sqrt{x} + 3e^x + 7\cos x)dx$.

$$\int (5x\sqrt{x} + 3e^x + 7\cos x)dx = 5\int x^{\frac{3}{2}} dx + 3\int e^x dx + 7\int \cos x dx$$

$$= 5\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + 3e^x + 7\sin x + C = 2x^2\sqrt{x} + 3e^x + 7\sin x + C.$$

Пример 2. $\int \frac{\cos^2 x + \sin 2x - \sqrt{2}\cos x}{\cos x} dx = \int \cos x\, dx + 2\int \sin x\, dx - \sqrt{2}\int dx = \sin x - 2\cos x - \sqrt{2}x + C$.

Пример 3. $\int\left(e^{4x}+\frac{3}{7}\sin 7x+7x-\frac{5}{\sin^2 x}-6+x^5\right)dx=\frac{1}{4}e^{4x}+\frac{3}{7}\sin 7x+\frac{7x}{\ln 7}+5\operatorname{ctg}x-6x+\frac{x^6}{6}+C$.

4. Метод замены переменной (метод подстановки).

Замена переменной интегрирования является одним из самых эффективных приемов сведения неопределенного интеграла к табличному.

Пример 4. Найти интеграл $\int x\sqrt{x-3}\,dx$.

Решение. Пусть $\sqrt{x-3}=t$, тогда $x-3=t^2 \Rightarrow x=3+t^2$, $dx=2t\,dt$.

$$\int x\sqrt{x-3}\,dx=\int(t^2+3)\cdot t\cdot 2t\cdot dt=2\int(t^4+3t^2)\,dt=$$

$$=2\int t^4dt+6\int t^2dt=\frac{2}{5}t^5+\frac{6}{3}t^3+C=\frac{2}{5}\sqrt{(x-3)^5}+2\sqrt{(x-3)^3}+C.$$

Пример 5. Найти интеграл $\int e^{x^2}xdx$.

Решение. Выполним подстановку $u=x^2$, тогда $u'=2x$, и, согласно формуле (2), имеем

$$\int e^{x^2}xdx=\frac{1}{2}\int e^{x^2}d(x^2)=\frac{1}{2}\int e^u d(u)\Big|_{u=x^2}=\left(\frac{1}{2}e^{x^2}+C\right)\Big|=\frac{1}{2}e^{x^2}+C$$

Пример 6. Найти интеграл $\int\sqrt{\sin x}\cos xdx$.

Решение. Сделаем подстановку $t=\sin x$; тогда $dt=\cos xdx$.

$$\int\sqrt{\sin x}\cos xdx=\int\sqrt{t}\,dt=\int t^{\frac{1}{2}}dt=\frac{2t^{\frac{3}{2}}}{3}+C=\frac{2}{3}\sin^{\frac{3}{2}}x+C.$$

5. Метод интегрирования по частям.

Формула $\int udv=uv-\int vdu$ называется формулой интегрирования по частям в неопределенном интеграле.

Классы функций, которые интегрируются по частям.

I. В интегралах вида

$$\int P(x)e^{kx}\,dx\ ,\quad \int P(x)a^{kx}\,dx\ ,\quad \int P(x)\sin kx\,dx\ ,\quad \int P(x)\cos kx\,dx\ ,$$

где $P(x)$ – многочлен, k – число, целесообразно обозначить $u=P(x)$, а оставшуюся часть подынтегрального выражения – dv.

$$\begin{array}{c|c|c}
\int & P(x) & e^{kx}dx \\
\int & P(x) & \sin kx\,dx \\
\int & P(x) & \cos kx\,dx \\
\int & P(x) & a^{kx}\,dx \\
\hline
 & u & dv
\end{array}$$

Пример 7.\ $\int (2x+3)\sin 4x\,dx = \begin{bmatrix} u = 2x+3; & du = 2dx \\ d\upsilon = \sin 4x\,dx; & \upsilon = -\dfrac{1}{4}\cos 4x \end{bmatrix} =$

$$= -\frac{1}{4}(2x+3)\cos 4x + \frac{1}{2}\int \cos 4x\,dx = -\frac{1}{4}(2x+3)\cos 4x + \frac{1}{8}\sin 4x + C$$

Пример 8. \ $\int x\cdot 3^{7x-1}dx = \begin{bmatrix} u = x; & du = dx \\ d\upsilon = 3^{7x-1}dx; & \upsilon = \dfrac{1}{7\ln 3}\cdot 3^{7x-1} \end{bmatrix} =$

$$= \frac{1}{7\ln 3}\cdot x\cdot 3^{7x-1} - \frac{1}{7\ln 3}\int 3^{7x-1}dx = \frac{1}{7\ln 3}\cdot x\cdot 3^{7x-1} - \frac{1}{49\ln^2 3}\cdot 3^{7x-1} + C.$$

II. В интегралах вида

$$\int P(x)\ln x\,dx\ ,\ \int P(x)\arcsin x\,dx\ ,\ \int P(x)\arccos x\,dx\ ,\ \int P(x)\,\mathrm{arctg}\,x\,dx\ ,\ \int P(x)\,\mathrm{arcctg}\,x\,dx$$

целесообразно обозначить $d\upsilon = P(x)dx$, а оставшуюся часть подинтегрального выражения – u .

$\int$	$P(x)$	$\arcsin x$	dx
$\int$	$P(x)$	$\arccos x$	dx
$\int$	$P(x)$	$\mathrm{arctg}\,x$	dx
$\int$	$P(x)$	$\mathrm{arcctg}\,x$	dx
$\int$	$P(x)$	$\ln x$	dx
		u	

$d\upsilon$

Пример9. $\int x^5\ln x\,dx = \begin{bmatrix} u = \ln x; & du = \dfrac{1}{x}dx \\ d\upsilon = x^5dx; & \upsilon = \dfrac{x^6}{6} \end{bmatrix} = \dfrac{x^6}{6}\ln x - \dfrac{1}{36}x^6 + C$

Пример10. $\int \arcsin 2x\,dx = \begin{bmatrix} u = \arcsin 2x; & du = \dfrac{2}{\sqrt{1-4x^2}}dx \\ d\upsilon = dx; & \upsilon = x \end{bmatrix} =$

$$= x\cdot\arcsin 2x - \int \frac{2x}{\sqrt{1-4x^2}}dx = x\cdot\arcsin 2x + \frac{1}{2}\sqrt{1-4x^2} + C$$

Упражнения для самостоятельной работы.

Вычислить неопределенный интеграл:

1). $\int \dfrac{x^3\cos^2 x + \sqrt{\pi} - 5^x\cos^2 x}{\cos^2 x}dx \quad \left[\dfrac{x^4}{4} + \sqrt{\pi}\,\mathrm{tg}\,x - \dfrac{5^x}{\ln 5} + C\right]$

2). $\int\left(\sqrt[5]{x} - \dfrac{1}{\sqrt[5]{x}}\right)dx \quad \left[\dfrac{5\cdot\sqrt[5]{x^6}}{6} - \dfrac{5\cdot\sqrt[5]{x^4}}{4} + C\right]$ 3) $\int\left(x\sqrt[3]{x} + \dfrac{x}{\sqrt{x^3}}\right)dx \quad \left[\dfrac{3\cdot\sqrt[3]{x^7}}{7} + \dfrac{2x^2}{\sqrt{x^2}} + C\right]$

4) $\int\left(\dfrac{x^2e^x - x^3 + x^2}{x^2}\right)dx \quad \left[e^x - \dfrac{x^2}{2} + x + C\right]$ 5) $\int \dfrac{x^4 - 3x^3 + 4x^2 + 6x - 8}{x^2}dx \quad \left[\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{3}{2}x^2 + 4x + 6\ln x + \dfrac{8}{x} + C\right]$

Вычислить неопределенный интеграл методом подстановки:

6) $\int\sqrt{2x-3}\,dx$ $\left[\frac{1}{3}(2x-3)^{\frac{3}{2}}+C\right]$ 7) $\int\frac{x}{\sqrt{x+4}}dx$ $\left[\frac{2}{3}\sqrt{x+4}\cdot(x-8)+C\right]$

8) $\int\sin^3 x\cos x\,dx$ $\left[\frac{\sin^4 x}{4}+C\right]$ 9) $\int\frac{\sin x}{\cos^2 x}dx$ $\left[\frac{1}{\cos x}+C\right]$

Найти неопределенный интеграл методом интегрирования по частям:

10). $\int(4x+5)\sin 3x\,dx$ $\left[-\frac{1}{3}\cos 3x(4x+5)+\frac{4}{9}\sin 3x+C\right]$

11). $\int(3x+2)\cos 5x\,dx$ $\left[\frac{1}{5}\sin 5x(3x+2)+\frac{3}{25}\cos 5x+C\right]$

12). $\int x\ln x\,dx$ $\left[\frac{1}{2}x^2\left(\ln x-\frac{1}{2}\right)+C\right]$

13). $\int x\sin x\,dx$ $[\sin x-x\cos x+C]$

14). $\int x\operatorname{arctg}x\,dx$ $\left[\frac{1}{2}\left((x^2+1)\operatorname{arctg}x-x\right)+C\right]$

Контрольные вопросы.

1.Какая функция называется первообразной?

2.Дайте определение неопределенного интеграла.

3. Сформулируйте основные правила интегрирования.

4.Воспроизведите таблицу интегралов.

5.В чем заключается метод непосредственного интегрирования?

6.Приведите пример вычисления интеграла методом подстановки.

7.Как вычислить интеграл, используя метод интегрирования по частям?

Литература.

1. Яковлев Г.Н. Алгебра и начала анализа. Часть 1. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 2006.

2. Яковлев Г.Н. Алгебра и начала анализа. Часть 2. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 2007.

3. Богомолов М.В. Практические занятия по математике. - М.: Высшая школа, 1993.