Уважаемые студенты!

Вам необходимо повторить теоретический материал темы и выполнить самостоятельную работу к практическому занятию.

- Ответить на контрольные вопросы.
- По вопросам обращаться 072-1098278 или hvastov@rambler.ru
- Фотоотчёт конспекта прислать в течение 3 дней со дня получения задания на hvastov@rambler.ru

Практическая работа

Тема: **Векторы. Действия с векторами.**

Цель: Отработать навыки. нахождения координат и длины вектора, применять основные формулы и правила работы с векторами, закрепить умения выполнять действия над векторами.

Ход работы

Задание

1 Найти линейную комбинацию векторов $\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{BC} + 4\overrightarrow{CD}$

2 Найти длины векторов $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{CD}$

3 Найти косинусы углов между векторами $\overrightarrow{AB}$ *и* $\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{BC}$ *и* $\overrightarrow{CD}$

4 Найти $\left(\overline{AB} + \overline{CD}\right) \cdot \overline{AD}$

5 Найти $Пр_{\overline{AB}}\left(\overline{BD} + \overline{AC}\right)$

6 Выяснить, коллинеарны ли векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$

7 Выяснить, ортогональны ли векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$

Варианты заданий к практической работе

1. A (2; 3; -1); B (0; 1; 2); C (4; -1; -1); D (2; -3; 1)
2. A (3; -1; 1); B (1; 3; 2); C (1; -1; -1); D (4; 0; 3)
3. A (4; 1; 2); B (1; 0; 1); C (-1; 2; -1); D (3; 1; 0)
4. A (3; -2; 1); B (2; -1; 1); C (4; 0; 2); D (1; 1; -1)
5. A (-2; 2; 1); B (3; 0; 4); C (7; 1; 0); D (3; 0; 5)
6. A (1; -1; -1); B (2; 5; 7); C (-3; 1; -1); D (2; 2; 3)
7. A (-3; 1; 4); B (1; -2; -3); C (2; 2; 3); D (5; 3; 1)
8. A (2; -5; 1); B (4; 3; 5); C (-1; 0; 1); D (2; 1; 0)
9. A (-2; 2; 1); B (3; -1; 0); C (4; 4; 0); D (1; -1; 1)
10. A (4; 2; 5); B (0; 1; 3); C (-1; -1; 1); D (2; -2; 1)
11. A (1; 0; 1); B (7; 4; 3); C (3; -5; 1); D (-2; 2; 2)
12. A (5; 1; 0); B (-1; -1; -1); C (2; 4; 7); D (1; 0; 1)
13. A (10; 1; 1); B (-2; -1; 1); C (4; 3; 2); D (1; 0; -1)
14. A (2; -7; 4); B (2; -1; 3); C (1; 0; -1); D (2; 1; 3)
15. A (6; 3; 3); B (-1; 0; -2); C (3; 1; 1); D (0; 4; 5)
16. A (3; 2; 0); B (2; -1; 7); C (4; 0; 5); D (1; -2; -1)
17. A (4; -1; 2); B (1; 0; 3); C (-2; 1; 5); D (3; 8; -1)
18. A (1; 1; -3); B (-7; 5; 2); C (2; 1; 0); D (3; -3; 1)
19. A (5; 0; 1); B (2; -1; -1); C (-6; -1; 1); D (3; 1; 3)
20. A (3; 5; 1); B (7; -4; 3); C (2; 1; 1); D (0; -1; 3)

Контрольные вопросы:

1. Чем характеризуется вектор?
2. Какие операции можно производить над векторами?
3. Какие векторы называются равными?
4. Что можно сказать об угле между векторами, если скалярное произведение отрицательно?
5. Что можно сказать об угле между векторами, если скалярное произведение положительно?
6. Что можно сказать об угле между векторами, если их скалярное произведение равно нулю?
7. Какие векторы называются коллинеарными?
8. Условие коллинеарности векторов
9. Какие векторы называются ортогональными?
10. Условие ортогональности векторов
11. Скалярное произведение векторов
12. Проекция вектора на направление
13. Координаты вектора
14. Длина вектора

Литература

1. Алгебра и начала анализа в 9-10 классах: Пособие для учителя / Л. О. Денищева, Ю. П. Дудницын, Б. М. Ивлев и др. − М.: Просвещение, 1988. – 272с.
2. Алгебра и начала анализа: Учеб. для 10-11 кл. общеобразоват. учреждений/ А. Н. Колмогоров, А. М. Абрамов, Ю. П. Дудницын и др.; Под ред. А. Н. Колмогорова. − 7-е изд., доп. − М.: Просвещение, 1998. − 365с.
3. Тульчинская Е. Е. Поурочное планирование и контрольные работы по алгебре и началам анализа, Журнал «Математика в школе» №10, с.27.
4. Электронный ресурс: freemath.ru/load/shkolnaja_matematika
5. Мордкович А.Г. МАТЕМАТИКА. Учебник для 10-11 классов общеобразовательных учреждений. М., «Мнемозина», 2010.-314с
6. Башмаков М.И. Математика: учебник для учреждений нач. и сред. проф. образования / М.И.Башмаков. - М.: Издательский центр «Академия», 2011. - 256с.
7. Колмогоров А.Н. и др. Алгебра и начала анализа. 10 (11) кл.[Учебник] / А. Н. Колмлгоров, - М.: Просвещение, 2007. - 384 с.
8. Ю.М.Колягин Математика в 2-х книгах, учебник для СПО, 2008, книга 1
9. И.Л.Соловейчик Сборник задач по математике для техникумов, -М, 2003
10. Н.В. Богомолов Сборник задач по математике, -М, 2006
11. http://www.cleverstudents.ru
12. http://www.coolreferat.com

Основные понятия.

1. Вектором называется отрезок, у которого указано, какой из концов является началом, а какой – концом (направленный отрезок), обозначается $\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}$, где A - начало вектора, B- конец.

2. Векторы называются коллинеарными, если они расположены на одной или параллельных прямых.

3. Векторы называются ортогональными, если угол между ними 90^0.

4. Векторы можно складывать (по правилам треугольника и параллелограмма), можно умножать на число:

$\vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$ $\quad \vec{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$ $\quad \vec{a} + \vec{b} = \{a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3\}$; $k\vec{a} = \{ka_1, ka_2, ka_3\}$.

5. Необходимое и достаточное условие коллинеарности векторов: $\vec{a} \| \vec{b} \Leftrightarrow \dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \dfrac{a_3}{b_3}$

6. Модуль вектора $\vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$ равен $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$.

7. Если заданы начало $A(x_1, y_1, z_1)$ и конец $B(x_2, y_2, z_2)$ вектора $\overrightarrow{AB}$, то его координаты и длина находятся следующим образом:

$\overrightarrow{AB} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$; $\quad |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

8. Скалярным произведением векторов называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot cos\varphi$$

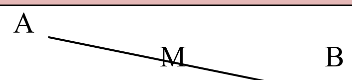
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

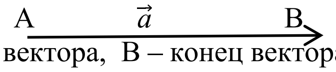
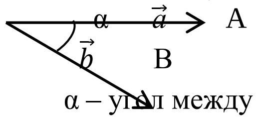
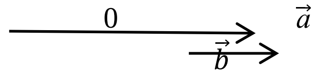
9. $cos\varphi = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \dfrac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$

10. Необходимое и достаточное условие ортогональности векторов: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

11. Проекция вектора на направление:

$$\text{Пр}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

Краткий справочный материал по теме	Примеры решения типовых заданий
 A(x_A; y_A; z_A) , B(x_A; y_A; z_A) **Длину отрезка** AB находим по формуле: **AB=** $\sqrt{(\boldsymbol{x_b - x_a})^2 + (\boldsymbol{y_b - y_a})^2 + (\boldsymbol{z_b - z_a})^2}$ Точка M – середина отрезка AB. **Координаты середины отрезка** находим по формуле : **M (** $\frac{x_a + x_b}{2}$; $\frac{y_a + y_b}{2}$; $\frac{z_a + z_b}{2}$**)**	Найдите длину отрезка AB и координаты середины отрезка AB, если A (3;-4;0) ; B (-1;2;4). *Решение:* AB = $\sqrt{(-1-3)^2 + (2-(-4))^2 + (4-0)^2}$ = = $\sqrt{(-4)^2 + 6^2 + 4^2} = \sqrt{16 + 36 + 16}$ = = $\sqrt{68}$ – длина отрезка AB. M ($\frac{3+(-1)}{2}$; $\frac{-4+2}{2}$; $\frac{0+4}{2}$) M (1;-1;2) – координаты середины отрезка AB.

Вектор – направленный отрезок. Обозначают: $\overrightarrow{AB}$ или $\vec{a}$  A – начало вектора, B – конец вектора **Длиной вектора** называют длину соответствующего ему отрезка. Записывают так: $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert$ =| AB| Вектор называется **нулевым**, если его начало совпадает с концом $\overrightarrow{AA}$, $\overrightarrow{0}$ – нулевые векторы	
Координаты вектора: $\overrightarrow{AB}\,(x_{b-}x_a;\ y_b - y_a;\ z_b - z_a)$ $\vec{a}\,(a_{1\,;}\,a_{2\,;}\,a_3)$	Найдите координаты вектора $\overrightarrow{AB}$, если A (5;-6;3), B (-2;0;7). *Решение:* $\overrightarrow{AB}$ (-2-5 ; 0-(-6) ; 7-3) $\overrightarrow{AB}$ (-7 ; 6 ; 4) – координаты вектора $\overrightarrow{AB}$
Длина вектора: $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert = \sqrt{(x_{b-}x_{a)})^2 + (y_b - y_{a)})^2 + (z_b - z_a)^2}$ $\lvert\vec{a}\rvert = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$	**1**.Найдите длину вектора $\overrightarrow{AB}$, если A (5;-6;3), B (-2;0;7). *Решение*: $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert = \sqrt{(-2-5)^2 + (0-(-6))^2 + (7-3)^2} =$ $= \sqrt{(-7)^2 + 6^2 + 4^2} = \sqrt{49+36+16} = \sqrt{101}$ – длина вектора $\overrightarrow{AB}$ **2.** Найдите длину вектора $\vec{a}$ (1;-3;2). *Решение:* $\lvert\vec{a}\rvert = \sqrt{1^2 + (-3)^2 + 2^2} = \sqrt{1+9+4} = \sqrt{15}$
Угол между векторами  α – угол между $\vec{a}$ и $\vec{b}$	**1.**Если α = 0^0 => векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – сонаправленные  **2.**Если α = 90° => $\vec{a} \perp \vec{b}$ – векторы перпендикулярные 
Скалярное произведение векторов: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \lvert\vec{a}\rvert \cdot \lvert\vec{b}\rvert \cdot \cos\alpha$ $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ $\cos\alpha = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\lvert\vec{a}\rvert \cdot \lvert\vec{b}\rvert}$	**1.**Найдите скалярное произведение векторов, если $\vec{a}$ (2; 8; -4), $\vec{b}$ (0; 1; -3). *Решение:* $\vec{a} \cdot \vec{b}$ = 2·0+8·1+(-4)·(-3) = 0+8+12 = 20 **2.** Найдите скалярное произведение векторов, если угол между ними равен 90°. *Решение:* Т.к. α = 90°, cos 90° = 0 => $\vec{a}\cdot\vec{b} = \lvert\vec{a}\rvert \cdot \lvert\vec{b}\rvert \cdot \cos 90° = \lvert\vec{a}\rvert \cdot \lvert\vec{b}\rvert \cdot 0 = 0$ **3.**Докажите, что векторы взаимно перпендикулярны, если $\vec{a}(-4;-8;-14)$, $\vec{b}(2;-6;-4)$ *Решение:* $\vec{a}\cdot\vec{b} = -4\cdot 2 + 8\cdot(-6) + (-14)\cdot(-4) = 0$ Т.к. $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$ => cos α = 0 => α = 90° => $\vec{a} \perp \vec{b}$

Пример выполнения практической работы
Задание

1 Найти линейную комбинацию векторов $\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{BC}+4\overrightarrow{CD}$

2 Найти длины векторов $\overrightarrow{AB};\quad \overrightarrow{BC};\quad \overrightarrow{CD}$

3 Найти косинусы углов между векторами $\overrightarrow{AB}$ *и* $\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{BC}$ *и* $\overrightarrow{CD}$

4 Найти $\left(\overline{AB}+\overline{CD}\right)\cdot\overline{AD}$

5 Найти $Пр_{\overline{AB}}\left(\overline{BD}+\overline{AC}\right)$

6 Выяснить, коллинеарны ли векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$

7 Выяснить, ортогональны ли векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$

Исходные данные:
Даны точки $A(6,3,3),\quad B(-1,0,-2),\quad C(3,1,1),\quad D(0,4,5).$

Задание 1
Решение:

$$\overrightarrow{AB}=\{-1-6;0-3;-2-3\}=\{-7;-3;-5\};$$

$$\overrightarrow{BC}=\{3+1;1-0;1+2\}=\{4;1;3\};$$

$$\overrightarrow{CD}=\{0-3;\ 4-1;\ 5-1\}=\{-3;\ 3;\ 4\};$$

$$\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{BC}+4\overrightarrow{CD}=\{-7-3\cdot4+4\cdot(-3);-3-3\cdot1+4\cdot3;-5-3\cdot3+4\cdot4\}=$$
$$\{-31;\ 6;\ 2\}$$

Задание 2
Решение:

$$\left|\overline{AB}\right|=\sqrt{(-7)^2+(-3)^2+(-5)^2}=\sqrt{83}$$

$$\left|\overline{BC}\right|=\sqrt{(4)^2+(1)^2+(3)^2}=\sqrt{26}$$

$$\left|\overline{CD}\right|=\sqrt{(-3)^2+(3)^2+(4)^2}=\sqrt{34}$$

Задание 3
Решение:

$$\cos\overrightarrow{AB};\overrightarrow{BC}=\frac{-7\cdot4-3\cdot1-5\cdot3}{\sqrt{83}\sqrt{26}}=\frac{-46}{\sqrt{2158}};$$

$$\cos\overrightarrow{BC};\overrightarrow{CD}=\frac{4\cdot(-3)+1\cdot3+3\cdot4}{\sqrt{26}\sqrt{34}}=\frac{3}{\sqrt{884}}$$

Задание 4
Решение:
Даны точки $A(6,3,3),\quad B(-1,0,-2),\quad C(3,1,1),\quad D(0,4,5).$

$$\overrightarrow{AB}=\{-7;-3;-5\};\quad \overrightarrow{CD}=\{-3;\ 3;\ 4\};$$

$$\overrightarrow{AD}=\{0-6;\ 4-3;\ 5-3\}=\{-6;1;\ 2\};$$

$\overline{AB}+\overline{CD}=\{-7+(-3),-3+3,-5+4\}=\{-10,0,-1\}$

$\left(\overline{AB}+\overline{CD}\right)\cdot\overline{AD}=-10\cdot(-6)+0\cdot1+(-1)\cdot2=58$

Задание 5

Решение:

$\overline{AB}=\{-7,-3,-5\}$,

$\overline{BD}=\{0-(-1),4-0,5-(-2)\}=\{1,4,7\}$, ,

$\overline{BD}+\overline{AC}=\{1+(-3),4+(-2),7+(-2)\}=\{-2,2,5\}$.

$Пр_{\overline{AB}}\left(\overline{BD}+\overline{AC}\right)=\dfrac{-7\cdot(-2)+(-3)\cdot2+(-5)\cdot5}{\sqrt{(-7)^2+(-3)^2+(-5)^2}}=\dfrac{-17}{\sqrt{83}}$.

Задание 6

Решение:

$\overline{AB}=\{-7,-3,-5\}$, $\overline{CD}=\{-3,3,4\}$

$\dfrac{-7}{-3}\neq\dfrac{-3}{3}\neq\dfrac{-5}{4}\Rightarrow$ векторы не являются коллинеарными.

Задание 7

Решение:

$\overline{AB}=\{-7,-3,-5\}$, $\overline{CD}=\{-3,3,4\}$

$-7\cdot(-3)+(-3)\cdot3+(-5)\cdot4=-8\neq0$, следовательно, векторы не являются ортогональными.