Уважаемые студенты!

Вашему вниманию представлена практическая работа на тему
«Булевы функции»

Задание

1. Выполнить упражнения для самостоятельного решения, согласно варианта по списку в журнале.
2. В конце практической работы представлен теоретический материал и примеры решения для ознакомления.
4. Фотоотчет выполненных упражнений присылать на электронную почту (и только на электронную почту!) в трехдневный срок

С уважением, Хвастова Светлана Ивановна

!!! Если возникнут вопросы обращаться по телефону 0721389311 (ватсап).

Электронная почта: xvsviv@rambler.ru

Практическая работа

Тема: Булевы функции.

Цель работы: овладеть навыками составления формул булевой алгебры и определения их истинности.

Задание:

Выполните задание согласно варианту.

Указания:

в задании 1 постройте две таблицы истинности и сравните результаты;

в задании 2 замените все действия на конъюнкцию, дизъюнкцию и отрицание, а затем преобразуйте по правилам де Моргана и правилам раскрытия скобок.

1 вариант.

1. Доказать равносильность двух данных формул:

$$A(x,y,z) \equiv \overline{x} \vee ((\overline{y} \vee z) \to z\overline{y})$$

$$B(x,y,z) \equiv (\overline{x} \vee y \vee z) \wedge \overline{x \wedge y \wedge z})$$

2. С помощью равносильных преобразований упростите формулу.

$(X \wedge Z \to Y \wedge Z) \to (Y \to Z)$

2 вариант.

1. Доказать равносильность двух данных формул:

$$U = \overline{x}\,\overline{z} \vee xy \vee x\overline{z}$$

$$B = z \to xy$$

2. С помощью равносильных преобразований упростите формулу.

$\left((X \to Y) \wedge (X \to \overline{Y})\right) \to \overline{X}$

3 вариант.

1. Доказать равносильность двух данных формул:

$$U = x \to (xy \to ((x \to y) \to y) \to z$$

$$B = y \to (x \to z)$$

2. С помощью равносильных преобразований упростите формулу.

$$\left(X \to \overline{Y}\right) \to ((X \to Y) \to \overline{X})$$

4 вариант.

1. Доказать равносильность двух данных формул:

$$U = x \to (xy \to ((x \to y) \to y) \to z$$

$$B = y \to (x \to z)$$

2. С помощью равносильных преобразований упростите формулу.

$\overline{Y} \to ((\overline{Y} \to X) \wedge (X \to Y))$;

5 вариант

1. Доказать равносильность двух данных формул:

$$U = (x|y \to z) \vee (x \to z)$$

$$B = (x \to y) \vee z$$

2. С помощью равносильных преобразований упростите формулу.

$(Y \leftrightarrow X) \to (X \to (X \wedge Y))$;

6 вариант

1. Доказать равносильность двух данных формул:

$$U = \overline{x}\,\overline{z} \vee xy \vee x\overline{z}$$

$$B = z \to xy$$

2. С помощью равносильных преобразований упростите формулу.

$((X \wedge \overline{Y}) \to Y) \to (X \to Y)$;

7 вариант.

1. Доказать равносильность двух данных формул:

$$U = (x|y \to z) \vee (x \to z)$$

$$B = (x \to y) \vee z$$

2. С помощью равносильных преобразований упростите формулу.

$(Y \leftrightarrow X) \to (X \to (X \wedge Y))$;

8 вариант.

1. Доказать равносильность двух данных формул:

$$U = \overline{x}\,\overline{z} \vee xy \vee x\overline{z}$$

$$B = z \to xy$$

2. С помощью равносильных преобразований упростите формулу.

$(X \to \overline{Y}) \to ((X \to Y) \to \overline{X})$;

9 вариант.

1. Доказать равносильность двух данных формул:

$$U = x \to (xy \to ((x \to y) \to y) \to z$$

$$B = y \to (x \to z)$$

2. С помощью равносильных преобразований упростите формулу.

$\overline{Y} \to ((\overline{Y} \to X) \wedge (X \to Y))$;

10 вариант.

1. Доказать равносильность двух данных формул:

$$U = (x|y \to z) \vee (x \to z)$$

$$B = (x \to y) \vee z$$

2. С помощью равносильных преобразований упростите формулу.

$((X \to Y) \wedge (X \to \overline{Y})) \to \overline{X}$;

11 вариант.

1. Доказать равносильность двух данных формул:

$$U = (x|y \to z) \vee (x \to z)$$

$$B = (x \to y) \vee z$$

2. С помощью равносильных преобразований упростите формулу.

$(Y \to X) \to (\overline{X} \to (Y \to X))$;

Теоретические сведения и примеры решения задач:

Коммутативные законы:

$x \wedge y \equiv y \wedge x$;

$x \vee y \equiv y \vee x$.

Ассоциативные законы:

$x \wedge (y \wedge z) \equiv (x \wedge y) \wedge z$;

$x \vee (y \vee z) \equiv (x \vee y) \vee z$.

Дистрибутивные законы:

$x \wedge (y \vee z) \equiv (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$;

$x \vee (y \wedge z) \equiv (x \vee y) \wedge (x \vee z)$.

Идемпотентные законы:

$x \wedge x \equiv x$;

$x \vee x \equiv x$.

Законы логического сложения и умножения с 0 и 1:

$x \wedge 0 \equiv 0$;

$x \vee 0 \equiv x$;

$x \wedge 1 \equiv x$;

$x \vee 1 \equiv 1$.

Законы операции «черта»:

$\bar{\bar{x}} \equiv x$;

$x \vee 0 \equiv x$;

$x \vee 1 \equiv 1$;

$\bar{x} \wedge x \equiv 0$;

$\bar{x} \vee x \equiv 1$.

Законы Де Моргана:

$\overline{x \wedge y} \equiv \bar{x} \vee \bar{y}$;

$\overline{x \vee y} \equiv \bar{x} \wedge \bar{y}$.

Законы поглощения:

$x \wedge (x \vee y) \equiv x$;

$x \vee (x \wedge y) \equiv x$.

Так как область изменения каждой переменной булевой функции есть множество $\{0,1\}$, а множество её значений также принадлежит этому множеству, то это позволяет вместо каждой из переменных некоторой булевой функции подставлять другие функции, получая, таким образом, из имеющегося запаса функций новые функции и выражая одни функции через другие. Такая подстановка в математике называется *композицией* или

суперпозицией функций. В теории булевых функций эта операция занимает особенно важное место.

Так, импликация и эквивалентность могут быть выражены через дизъюнкцию, конъюнкцию и отрицание:

$$x_1 \to x_2 = \bar{x}_1 \vee x_2;$$

$$x_1 \sim x_2 = x_1 x_2 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2,$$

что может быть проверено непосредственно с помощью таблиц истинности перебором всех возможных значений x_1 и x_2. При этом запись второй формулы использует общепринятое соглашение, согласно которому конъюнкция выполняется раньше, чем дизъюнкция и сложение по модулю 2, что позволяет опустить часть скобок.

Кроме того, эквивалентность может быть выражена через импликацию

$$x_1 \sim x_2 = (x_1 \to x_2) \& (x_2 \to x_1),$$

что вполне отвечает привычному представлению о том, что x_1 эквивалентно x_2, если x_1 влечет x_2 и x_2 влечет x_1.

Сложение по модулю 2 выражается через дизъюнкцию, конъюнкцию и отрицание как

$$x_1 \oplus x_2 = x_1 \bar{x}_2 \vee x_1 \bar{x}_2.$$

Штрих Шеффера, стрелка Пирса также выражаются через дизъюнкцию, конъюнкцию и отрицание:

$$x_1 \mid x_2 = \overline{x_1 x_2};$$

$$x_1 \downarrow x_2 = \overline{x_1 \vee x_2}.$$

Знание законов логики позволяет проверять правильность рассуждений и доказательств. Основываясь на законах, можно выполнять упрощение сложных логических выражений. Такой процесс замены сложной логической

функции более простой, но равносильной ей, называется минимизацией функции.

Некоторые преобразования логических формул похожи на преобразования формул в обычной алгебре (вынесение общего множителя за скобки, использование переместительного и сочетательного законов и т.п.), другие – основаны на свойствах, которыми не обладают операции обычной алгебры (использование распределительного закона для конъюнкции, законов поглощения, склеивания, де Моргана и др.).

Нарушения законов логики приводят к логическим ошибкам и вытекающим из них противоречиям.

Пример:

1. Упростить формулу $(A \vee B) \wedge (A \vee C)$.

<u>*Решение:*</u>

Раскроем скобки: $(A \vee B) \wedge (A \vee C) = A \wedge A \vee A \wedge C \vee B \wedge A \vee B \wedge C$;

По закону идемпотентности $A \wedge A = A$, следовательно,

$A \wedge A \vee A \wedge C \vee B \wedge A \vee B \wedge C = A \vee A \wedge C \vee B \wedge A \vee B \wedge C$;

В высказываниях A и $A \wedge C$ вынесем за скобки A и используя свойство $A + 1 = 1$, получим

$A \vee A \wedge C \vee B \wedge A \vee B \wedge C = A \wedge (1 \vee C) \vee B \wedge A \vee B \wedge C = A \vee B \wedge A \vee B \wedge C$;

Аналогично предыдущему пункту вынесем за скобки высказывание A.

$A \vee B \wedge A \vee B \wedge C = A \wedge (1 \vee B) \vee B \wedge C = A \vee B \wedge C$.

Таким образом, мы доказали закон дистрибутивности.

Всякую формулу можно преобразовать так, что в ней не будет отрицаний сложных высказываний – все отрицания будут применяться только к простым высказываниям.

2. Упростить выражения $\overline{A\overline{B}} + \overline{B}$, $\overline{\overline{B}C + C}$, $\overline{\overline{A}C} + B\overline{C}$ так, чтобы в полученных формулах не содержалось отрицания сложных высказываний.

Решение:

$$X = \overline{AB} + \overline{B} = \overline{A} + \overline{B} + \overline{B} = \overline{A} + \overline{B};$$

$$Y = \overline{\overline{B}C + C} = \left(B + \overline{C}\right)\overline{C} = \overline{C};$$

$$\overline{\overline{A}C} + B\overline{C} = A + \overline{C} + B\overline{C} = A + \overline{C}.$$

3. Упростить выражение $(x_1 \to x_2x_3)(x_2 \to x_1x_3) \vee (x_1 \sim x_2)$.

Решение:

Выразив импликации и эквивалентность через $\vee$, &, $\overline{}$, имеем

$$(x_1 \to x_2x_3)(x_2 \to x_1x_3) \vee (x_1 \sim x_2) = (\bar{x}_1 \vee x_2x_3)(x_2 \vee x_1x_3) \vee x_1x_2 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2.$$

Перемножая скобки и помня, что $x \cdot \bar{x} = 0$, получаем

$$(\bar{x}_1 \vee x_2x_3)(x_2 \vee x_1x_3) \vee x_1x_2 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2 = \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_1x_2x_3 \vee x_1x_2 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2.$$

Удаляя поглощаемые члены, завершаем преобразование

$$\bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_1x_2x_3 \vee x_1x_2 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2 = \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_1x_2.$$