Уважаемые студенты!

- изучить материал лекции;
- написать краткий конспект;
- ответить на контрольные вопросы.
- По вопросам обращаться 072-1098278 или hvastov@rambler.ru
- Фотоотчёт конспекта прислать в течение 3 дней со дня получения задания на hvastov@rambler.ru

Лекция на тему: «Векторы. Сложение, умножение векторов и угол между ними»

§1. Векторы на плоскости и в пространстве

В этом параграфе напомним основные определения, связанные с понятием вектора.

Пара точек называется *упорядоченной*, если про них можно сказать, какая из них первая, какая вторая. Упорядоченная пара точек задает *направленный отрезок*.

Определение 1. Направленный отрезок будем называть *вектором*. Первая точка в упорядоченной паре называется *началом* вектора, а вторая – его *концом*.

Для обозначения вектора используют обозначения: $\overrightarrow{AB}$, где A – точка приложения вектора (начало вектора), точка B – конец вектора; или $\vec{a}$; или $\boldsymbol{a}$.

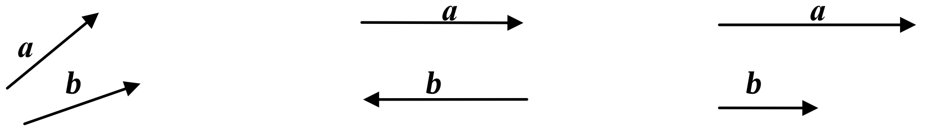
Вектор, начало и конец которого совпадают, называется *нулевым* вектором и обозначается **0**.

Расстояние между началом и концом вектора называется его *длиной* (а также *модулем* или *абсолютной величиной*). Длина вектора обозначается $|\vec{a}|$, или $|\boldsymbol{a}|$, или $|\overrightarrow{AB}|$.

Определение 2. Векторы называются *коллинеарными*, если они расположены на одной прямой или на параллельных прямых, т.е. существует прямая, которой они параллельны. Векторы называются *компланарными*, если существует плоскость, которой они параллельны.

Определение 3. Два вектора называются *равными*, если они коллинеарны, одинаково направлены и имеют равные длины.

На рисунке 1 показаны векторы, для которых нарушается одно из условий равенства: векторы неколлинеарны (рис.1 *а*), векторы направлены в разные стороны (рис. 1 *б*), векторы имеют разные длины (рис. 1 *в*).



а) *б*) *в*)

Рис. 1

Отметим следующие свойства отношения равенства между векторами:

1. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA}$ (рефлексивность).

2. Если $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$, то $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}$ (симметричность).

3. Если $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{EF}$, то $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{EF}$ (транзитивность).

4. Если $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$, то $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{CD}\right|$.

5. Для любых точек A, B, C существует единственная точка D такая, что $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$.

Первые три свойства можно заменить следующей формулировкой: отношение равенства является отношением эквивалентности.

Заметим, что понятие равенства векторов существенно отличается от понятия равенства, например, чисел. Каждое число равно только самому себе, иначе говоря, два равных числа при всех обстоятельствах могут рассматриваться как одно и то же число. С векторами дело обстоит иначе: в силу определения существуют различные, но равные между собой векторы. Мы можем от любой точки отложить вектор, равный данному.

Возьмем некоторый вектор $\overrightarrow{AB}$ и рассмотрим множество всех векторов, равных вектору $\overrightarrow{AB}$. Это множество называется *классом эквивалентности*, порожденным вектором $\overrightarrow{AB}$. Вектор $\overrightarrow{AB}$ является представителем класса эквивалентности.

Определение 4. *Свободным вектором* ***a*** будем называть множество всех векторов, равных вектору ***a***, т.е. весь класс эквивалентности.

Из школьного курса геометрии известно, что вектор можно рассматривать как параллельный перенос. Это определение также можно считать определением свободного вектора.

Для свободного вектора, как и для чисел, равенство означает совпадение: два вектора равны в том и только в том случае, когда это один и тот же вектор. В дальнейшем под понятием вектор будем понимать свободный вектор.

Рассмотрим линейные операции над векторами. Линейными операциями называют сложение векторов и умножение вектора на число.

Определение 5. Пусть даны два вектора ***a*** и ***b***. Построим равные им векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$ (т.е. перенесем конец ***a*** и начало ***b*** в произвольную точку B). Тогда вектор $\overrightarrow{AC}$ называется *суммой* векторов и обозначается ***a*** + ***b*** (рис.2).

a ***b*** B $\overrightarrow{BC}$ C $\overrightarrow{AB}$ $\overrightarrow{AC}$ A

Рис. 2

Свойства операции сложения векторов:

1. Для любых векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ сумма $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ также вектор (замкнутость).
2. Для любых векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ выполняется $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$ (коммутативность).
3. Для любых векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ выполняется $\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c}$ (ассоциативность).
4. Во множестве векторов есть нулевой вектор $\mathbf{0}$, обладающий свойством: $\mathbf{0} + \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$ для любого вектора $\boldsymbol{a}$. С учетом коммутативности можно записать $\mathbf{0} + \boldsymbol{a} = \mathbf{0} + \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$ (существование нулевого вектора).
5. Для любого вектора $\boldsymbol{a}$ найдется вектор $-\boldsymbol{a}$, такой что

$$\boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{a}) = (-\boldsymbol{a}) + \boldsymbol{a} = \mathbf{0}$$

(существование противоположного вектора).

Определение 6. *Произведением вектора* $\boldsymbol{a}$ на действительное число α называется любой вектор $\boldsymbol{b}$, удовлетворяющий условиям:

а) $|\boldsymbol{b}| = |\alpha| \cdot |\boldsymbol{a}|$;

б) вектор $\boldsymbol{b}$ коллинеарен вектору $\boldsymbol{a}$;

в) векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ направлены одинаково, если $\alpha > 0$ и противоположно, если $\alpha < 0$.

Произведение вектора $\boldsymbol{a}$ на число α обозначается $\alpha\boldsymbol{a}$.

Из курса линейной алгебры известны простейшие свойства векторных пространств, которые, естественно, выполняются для векторов на плоскости и в пространстве. Например, доказывалась единственность нулевого элемента, единственность противоположного элемента, равенство $-\boldsymbol{a} = (-1)\boldsymbol{a}$ и другие.

Свойства умножения вектора на число:

1. Для любых чисел α и β и любого вектора $\boldsymbol{a}$ верно равенство

$$(\alpha\,\beta)\,\boldsymbol{a} = \alpha\,(\beta\,\boldsymbol{a}).$$

2. Умножение вектора на единицу не меняет этого вектора $1 \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$.
3. Для любого вектора $\boldsymbol{a}$ выполняется $0 \cdot \boldsymbol{a} = \mathbf{0}$.
4. Для любого числа α выполняется $\alpha \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$.

Свойства, связывающие операции сложения и умножения на число:

1. Для любых чисел α, β и любого вектора $\boldsymbol{a}$ выполняется

$$(\alpha + \beta)\, \boldsymbol{a} = \alpha\, \boldsymbol{a} + \beta\, \boldsymbol{a}$$

(дистрибутивность по сложению чисел).

2. Для любых векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ и любого числа α выполняется

$$\alpha\, (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \alpha\, \boldsymbol{a} + \alpha\, \boldsymbol{b}$$

(дистрибутивность по сложению векторов).

Определение 7. *Разностью* двух векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называется сумма вектора $\boldsymbol{a}$ и вектора, противоположного $\boldsymbol{b}$, т.е. $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{b})$.

Определяя вычитание векторов через сложение, мы не будем рассматривать вычитание как отдельную операцию. Также нет смысла рассматривать операцию деления вектора на число, которую можно определить как умножение вектора на число, обратное данному.

§2. ДЕКАРТОВА ПРЯМОУГОЛЬНАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ

Из школьного курса математики видно, что наиболее распространенной является система координат, где базисные векторы имеют одинаковую длину на всех осях (единичный отрезок) и оси координат попарно образуют прямой угол.

Определение. Базис называется *ортонормированным*, если любые его два различных вектора перпендикулярны, и длина любого базисного вектора равна единице. Система координат, базис которой ортонормирован, называется *декартовой прямоугольной* системой координат.

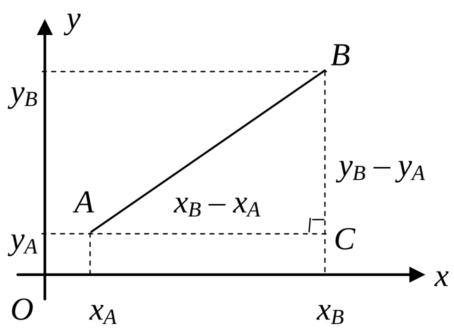


Рис. 6

Очевидно, что в декартовой прямоугольной системе координат на плоскости расстояние между точками $A(x_A, y_A)$ и $B(x_B, y_B)$ можно находить по формуле

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}\ .$$

Действительно, из рис. 6 видно, что отрезок AB является гипотенузой прямоугольного треугольника ABM, где катеты равны $x_B - x_A$ и $y_B - y_A$. Поэтому указанная формула является следствием теоремы Пифагора

$$|AB|^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2.$$

Нетрудно сделать обобщение на случай, когда точки A и B лежат в пространстве:

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}\ .$$

Очевидно, если одна из точек отрезка совпадает с началом координат, а другая есть точка $M(x, y, z)$, то

$$|OM| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\ .$$

Следовательно, в декартовой прямоугольной системе координат для радиус-вектора $\overrightarrow{OM}$ имеем

$$|\overrightarrow{OM}|^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

т.е. квадрат длины вектора равен сумме квадратов его координат.

§ 3. Скалярное произведение

Понятие скалярного произведения вводилось в школьном курсе геометрии. Напомним его и рассмотрим свойства этого произведения.

Определение 17. *Скалярным произведением* двух векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называется число $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ равное произведению модулей векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ на косинус угла между ними, т.е.

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| \cdot \cos\varphi,$$

где φ – угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

Определение 18. Если угол между векторами прямой, то векторы называются *ортогональными*.

Скалярное произведение нулевого вектора на любой вектор считается равным нулю.

Свойства скалярного произведения:

1. $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})$ (коммутативность);
2. $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 0$ тогда и только тогда, когда выполняется одно из условий:
   а) $\boldsymbol{a} = 0$;
   б) $\boldsymbol{b} = 0$;
   в) $\cos\varphi = 0$, т. е. $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ ортогональны;
3. $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = |\boldsymbol{a}|^2$, т. е. скалярный квадрат вектора равен квадрату модуля этого вектора. Действительно, в этом случае $\varphi = 0$ и $\cos\varphi = 0$, тогда

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{a}| \cdot \cos\varphi = |\boldsymbol{a}|^2;$$

4. $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = 0$ тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{a}$ – нулевой вектор;
5. векторы ортонормированного базиса удовлетворяют соотношениям:

$$(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1) = (\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2) = (\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_3) = 1,$$

$$(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_3) = (\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) = 0;$$

6. если λ – число, то $(\lambda\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \lambda(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$, т.е. числовой множитель можно выносить за знак скалярного произведения;
7. $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) + (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ (дистрибутивность);
8. координаты любого вектора в прямоугольной системе координат равны скалярным произведениям этого вектора на базисные вектора.

Докажем последнее свойство. Пусть вектор $\boldsymbol{a}$ имеет в некотором базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ разложение

$$\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3.$$

Рассмотрим скалярное произведение вектора на базисный вектор, используя при этом свойство дистрибутивности:

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{e}_1) = (a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3, \mathrm{e}1) =$$

$$= (a_1\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1) + (a_2\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1) + (a_3\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_1) = a_1(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1) + a_2(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1) + a_3(\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_1).$$

Если базис ортогонален, то

$$(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) = (\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_1) = 0, (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1) = |\boldsymbol{e}_1|^2.$$

Получаем, что скалярное произведение вектора на базисный вектор равно

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{e}_1) = a_1\, |\boldsymbol{e}_1|^2,$$

$$a_1 = \frac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{e}_1)}{|\boldsymbol{e}_1|^2}.$$

Аналогично, другие координаты вектора:

$$a_2 = \frac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{e}_2)}{|\boldsymbol{e}_2|^2},\ a_3 = \frac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{e}_3)}{|\boldsymbol{e}_3|^2}.$$

Если базис $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ не только ортогонален, но еще и нормирован, т.е. $|\boldsymbol{e}_1| = |\boldsymbol{e}_2| = |\boldsymbol{e}_3| = 1$, то

$$a_1 = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{e}_1),\ \ a_2 = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{e}_2),\ \ a_3 = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{e}_3).$$

Таким образом, свойство 8 доказано.

Найдем выражение скалярного произведения через координаты сомножителей.

Пусть в некотором базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ имеют следующие координаты

$$\boldsymbol{a}(a_1, a_2, a_3), \boldsymbol{b}(b_1, b_2, b_3).$$

Найдем их скалярное произведение $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$, для чего воспользуемся свойствами 6 и 7.

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3, b_1\boldsymbol{e}_1 + b_2\boldsymbol{e}_2 + b_3\boldsymbol{e}_3) =$$

$$= a_1\, b_1(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1) + a_1b_2(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) + a_1b_3(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_3) +$$

$$+ a_2 b_1(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1) + a_2 b_2(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2) + a_2 b_3(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) +$$

$$+ a_3 b_1(\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_1) + a_3 b_2(\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_2) + a_3 b_3(\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_3).$$

Если базис $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ произвольный, то данная формула является окончательной. Если базис $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ ортогонален, т. е.

$$(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_3) = (\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) = 0,$$

то формула примет вид:

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = a_1 b_1 (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1) + a_2 b_2 (\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2) + a_3 b_3 (\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_3) =$$

$$= a_1 b_1 |\boldsymbol{e}_1|^2 + a_2 b_2 |\boldsymbol{e}_2|^2 + a_3 b_3 |\boldsymbol{e}_3|^2.$$

Если кроме ортогональности векторов потребуем, чтобы их длины равнялись единице, т. е. базис $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ являлся бы ортонормированным, то формула будет иметь вид:

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3\,.$$

Это формула выражения скалярного произведения через координаты сомножителей в ортонормированном базисе.

Учитывая, что

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| \cdot \cos\varphi\,,$$

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\,,\ |\boldsymbol{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}\,,$$

получим формулу для нахождения угла между векторами

$$\cos\varphi = \frac{(a,b)}{|a| \cdot |b|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}\,.$$

Таким образом, скалярное произведение применяется, когда нужно найти угол между векторами, определить являются ли данные векторы ортогональными.

§4. Примеры решения типовых задач

Пример 1.

Даны координаты точек: $A(4;\,3)$, $B(7;\,6)$, $C(2;\,11)$. Докажем, что треугольник ABC прямоугольный.

Найдем длины сторон треугольника ABC. С этой целью используем формулу, позволяющую находить расстояние между двумя точками на плоскости:

$$|M_1 M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\,.$$

Длины сторон будут равны:

$$|AB| = \sqrt{(7-4)^2 + (6-3)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18}\,,$$

$$|AC| = \sqrt{(2-4)^2 + (11-3)^2} = \sqrt{4+64} = \sqrt{68},$$

$$|BC| = \sqrt{(2-7)^2 + (11-6)^2} = \sqrt{25+25} = \sqrt{50}.$$

Учитывая, что для сторон данного треугольника выполняется теорема Пифагора

$$|AB|^2 + |BC|^2 = \left(\sqrt{50}\right)^2 + \left(\sqrt{18}\right)^2 = \left(\sqrt{68}\right)^2 = |AC|^2,$$

то треугольник ABC – прямоугольный.

Пример 2.

Найдем скалярное произведение векторов

$$\boldsymbol{a} = 4\boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{j} + 6\boldsymbol{k} \text{ и } \boldsymbol{b} = 3\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}.$$

Для того чтобы найти скалярное произведение векторов, нужно умножить соответствующие координаты и полученные произведения сложить. Так, для векторов $\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{b} = b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j} + b_3\boldsymbol{k}$ скалярное произведение имеет вид:

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

Для данных векторов получаем

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 4\cdot 3 + 5\cdot(-4) + 6\cdot 1 = 12 - 20 + 6 = -2.$$

Пример 3.

Покажем, что векторы $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} + 5\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$ перпендикулярны.

Два вектора перпендикулярны, если их скалярное произведение равно нулю.

Найдем скалярное произведение:

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 2\cdot 1 + (-3)\cdot 4 + 5\cdot 2 = 2 - 12 + 10 = 0.$$

Таким образом, векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ перпендикулярны.

Пример 4.

Выясним, при каком значении параметра m векторы $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + m\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{b} = 3\boldsymbol{i} + m\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$ перпендикулярны.

Найдем скалярное произведение векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$:

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 2\cdot 3 + 3\cdot m - 2\cdot m = 6 + m.$$

Векторы перпендикулярны, если их скалярное произведение равно нулю. Приравниваем к нулю произведение $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$:

$$6 + m = 0.$$

При $m = -6$ векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ перпендикулярны.

Пример 5.

Найдем скалярное произведение $(3\boldsymbol{a} + 4\boldsymbol{b}, 2\boldsymbol{a} - 3\boldsymbol{b})$, если $|\boldsymbol{a}| = 2$, $|\boldsymbol{b}| = 1$ и угол φ между $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ равен $\pi/3$.

Воспользуемся свойствами скалярного произведения:

$$(\alpha\boldsymbol{a}, \beta\boldsymbol{b}) = \alpha\beta(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}),$$

$$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) + (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}),$$

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})$$

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = |\boldsymbol{a}|^2,$$

а также определением скалярного произведения $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = |\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\cos\varphi$. Перепишем скалярное произведение в виде

$$(3\boldsymbol{a} + 4\boldsymbol{b}, 2\boldsymbol{a} - 3\boldsymbol{b}) = 6(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) - 9(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + 8(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) - 12(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}) =$$

$$= 6|\boldsymbol{a}|^2 - (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) - 12|\boldsymbol{b}|^2 = 6\cdot 2^2 - 2\cdot 1\cdot\cos(\pi/3) - 12\cdot 1^2 = 11.$$

Пример 6.

Определим угол между векторами

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k} \text{ и } \boldsymbol{b} = 6\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}.$$

Для нахождения угла воспользуемся определением скалярного произведения двух векторов

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = |\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\cos\varphi,$$

где φ – угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Выразим $\cos\varphi$ из этой формулы

$$\cos\varphi = \frac{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}.$$

Учитывая, что $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 1\cdot 6 + 2\cdot 4 + 3\cdot(-2) = 8$, $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$, $|b| = \sqrt{6^2 + 4^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{14}$, получаем:

$$\cos\varphi = \frac{8}{\sqrt{14}\cdot 2\sqrt{14}} = \frac{8}{2\cdot 14} = \frac{2}{7}.$$

Следовательно, $\varphi = \arccos\frac{2}{7}$.

Вопросы для самопроверки

1. Что называется вектором?
2. Какие возможны линейные операции над векторами?
3. Какие векторы называются коллинеарными, компланарными?
4. Дать определение скалярного произведения, каковы его свойства.
5. Как вычислить скалярное произведение, зная координаты векторов?