Уважаемые студенты.

Вам необходимо выучить материал лекции, рассмотреть решение примеров, ответить на контрольные вопросы.

По вопросам обращаться 072-1098278 или hvastov@rambler.ru
Фотоотчёт конспекта прислать в течении 3 дней со дня получения задания на hvastov@rambler.ru

Лекция

Тригонометрические уравнения и неравенства.

План.

1.Определения тригонометрических и простейших тригонометрических уравнений.

2.Формулы общих и частных решений простейших тригонометрических уравнений.

3.Примеры применения простейших тригонометрических уравнений.

4. Определение тригонометрического неравенства.

5. Формулы решений простейших тригонометрических неравенств.

1. Тригонометричесие уравнения - это уравнения, в которых неизвестная величина находится под знаком тригонометрической функции.

Простейшие тригонометрические уравнения – это уравнения вида **sin x=a**, **cos x=**a, **tg x=a**, **ctg x=a**.

2. Решение простейших тригонометрических уравнений.

Уравнение	Формулы решения	Частные случаи
$\sin x = a$	$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, n \in z$ при $\lvert a\rvert \le 1$ при $\lvert a\rvert > 1$ - решений нет	$\sin x = 0$; $x = \pi n,\ n \in z$ $\sin x = 1$; $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in z$ $\sin x = -1$, $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in z$
$\cos x = a$	$x = \pm\arccos a + 2\pi n$, $n \in z$ при $\lvert a\rvert \le 1$	$\cos x = 0$; $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$,

	при $\lvert a\rvert > 1$ - решений нет	$n \in z$ $\cos x = 1$; $x = 2\pi n$, $n \in z$ $\cos x = -1$; $x = \pi + 2\pi n$, $n \in z$
$tgx = a$	$x = arctga + \pi n$, $n \in z$ a - любое число	$tgx = 0$ $x = \pi n$, $n \in z$ $tgx = 1$ $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in z$ $tgx = -1$ $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$ $n \in z$
$ctgx = a$	$x = arcctga + \pi n$, $n \in z$ a - любое число	$ctgx = 0$ $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$ $n \in z$ $ctgx = 1$ $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$ $n \in z$ $ctgx = -1$ $x = \frac{3\pi}{4} + \pi n$ $n \in z$

1) Решить уравнение $\sin x = \frac{1}{2}$.

$$x = (-1)^k \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) + \pi k,\ k \in Z \Rightarrow x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z$$

Ответ: $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z$

2) Решить уравнение $\cos x = \frac{1}{2}$.

$$x = \pm \arccos\frac{1}{2} + 2\pi k,\ k \in Z \Rightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z.$$

Ответ: $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z$.

3) Решить уравнение $tgx = \sqrt{3}$.

$$x = arctg\sqrt{3} + \pi k,\ k \in Z \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in Z.$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in Z$.

4) Решить уравнение $ctgx = \sqrt{3}$.

$x = arcctg\sqrt{3} + \pi k,\ k \in Z \Rightarrow$ $x = \frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z$

Ответ: $x = \frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z$.

5. $sin 3x = 1$

$3x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

$x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}$

Ответ: $x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}$

6. $\cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) = 0$

$\frac{\pi}{3} - 2x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

$-2x = -\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

$-2x = \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

$x = -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$

Ответ: $x = -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$

Примеры применения простейших тригонометрических уравнений.

Пример 1. Решить уравнение $\cos^2 x + \cos x - 2 = 0$.

Решение. Это уравнение является квадратным относительно $\cos x$. Поэтому сделаем замену $\cos x = t$. В результате получим уравнение $t^2 + t - 2 = 0$. Его корни: $t_1 = 1,\ t_2 = -2$, то есть получаем уравнение $\cos x = 1$ или $\cos x = -2$. Первое уравнение дает $x = 2\pi k,\ k \in Z$. Второе уравнение не имеет корней.

Ответ: $x = 2\pi k,\ k \in Z$.

Пример 2. Решить уравнение $6\cos^2 x + 5\sin x - 7 = 0$.

Решение. Так как $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, то уравнение можно представить в виде $6(1 - \sin^2 x) + 5\sin x - 7 = 0$; $6\sin^2 x - 5\sin x + 1 = 0$. Сделаем замену $t = \sin x$. Получим квадратное уравнение $6t^2 - 5t + 1 = 0$, решая которое, имеем: $D = 25 - 6 \cdot 4 = 1,\ t_{1,2} = \dfrac{5 \pm 1}{12}$,то есть $t_1 = \dfrac{1}{2},\ t_2 = \dfrac{1}{3}$. Таким образом, получим два простейших уравнения $\sin x = \dfrac{1}{2}$ или $\sin x = \dfrac{1}{3}$. Решая их, имеем $x = (-1)^k \dfrac{\pi}{6} + \pi k,\ \ k \in Z$ или $x = (-1)^k \arcsin\dfrac{1}{3} + \pi k,\ \ k \in Z$.

Ответ: $(-1)^k \dfrac{\pi}{6} + \pi k;\ \ (-1)^k \arcsin\dfrac{1}{3} + \pi k,\ \ k \in Z$

Пример 1. Решить уравнение:

$3\sin^2 x - 2\sin x \cos x - \cos^2 x = 0$.

Решение. Это уравнение является однородным относительно $\sin x$ и $\cos x$. Поэтому, разделив его на $\cos^2 x$ $(\cos x \neq 0)$, получим $3tg^2 x - 2tgx - 1 = 0$. Введем новую переменную $tgx = t$ и решим квадратное уравнение $3t^2 - 2t - 1 = 0$.

Его корни $t_1 = 1,\ t_2 = -\dfrac{1}{3}$. Получили два простейших тригонометрических уравнения $tgx = 1,\ tgx = -\dfrac{1}{3}$. Решая их, найдем: $x = \dfrac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z$ или $x = -arctg\dfrac{1}{3} + \pi k,\ k \in Z$.

Ответ: $\dfrac{\pi}{4} + \pi k;\ \ -arctg\dfrac{1}{3} + \pi k,\ k \in Z$.

Пример 2. Решить уравнение:

$6\sin^2 x + \sin x \cos x - \cos^2 x = 2$.

Решение. Это уравнение, сводящееся к однородному. Имеем

$$6\sin^2 x + \sin x \cos x - \cos^2 x = 2(\sin^2 x + \cos^2 x),$$

$$4\sin^2 x + \sin x \cos x - 3\cos^2 x = 0,$$

то есть получили однородное уравнение. Разделив обе части уравнения на $\cos^2 x$ $(\cos x \neq 0)$, получим $4tg^2x + tgx - 3 = 0$. Решая это уравнение, квадратное относительно tgx, найдем, что $tgx = -1$ либо $tgx = \frac{3}{4}$. Таким образом, $x = \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z$ или $x = arctg\frac{3}{4} + \pi k,\ k \in Z$.

Ответ: $\frac{\pi}{4} + \pi k,\ arctg\frac{3}{4} + \pi k,\ k \in Z$.

Решите уравнение $5\sin^2x - 8\sin x \cos x - \cos^2x = -2$.

Решение: Перепишем уравнение в виде

$7\sin^2x - 8\sin x \cos x + \cos^2x = 0$.

Получили уравнение, однородное относительно sinx и cosx.

Рассмотрим два случая:

- cosx = 0, тогда $7\sin^2$ – 0 + 0^2 =0, откуда sinx = 0, что невозможно, поскольку $\sin^2x + \cos^2x = 1$; в этом случае корней нет.

- cosx $\neq 0$, тогда разделим обе части уравнения на $\cos^2x$:

$7tg^2x - 8\ tgx + 1 = 0$.

Пусть y=tgx. Получим: $7y^2-8y+1=0$, находим y_1, y_2 и делаем обратную замену.

Простейшие тригонометрические неравенства – это неравенства вида

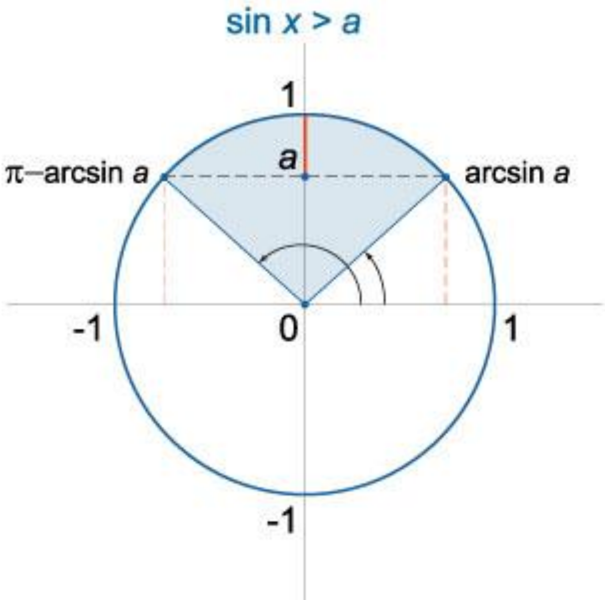
sin x > a, sin x < a, cos x> a, cos x < a, tg x > a, tg x < a.

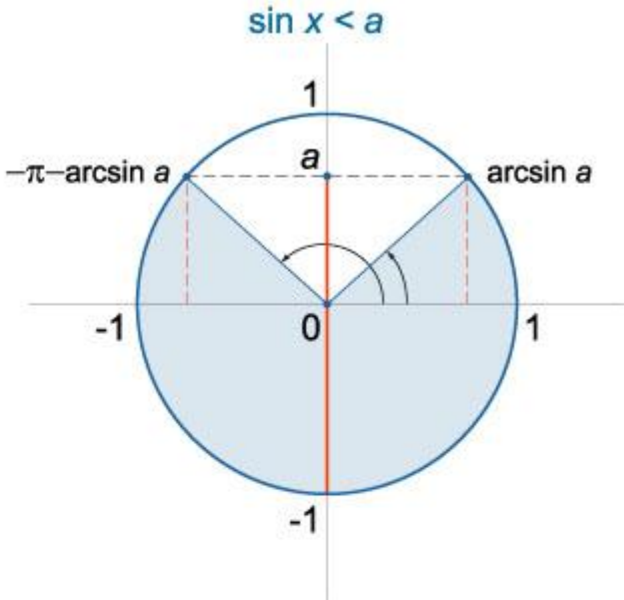
$\sin x < a$

a	M
$-1 < a \leq 1$	$-\pi - \arcsin a + 2\pi k < x < \arcsin a + 2\pi k,\quad k \in Z$
$a > 1$	R
$a \leq -1$	$\varnothing$

$\sin x > a$

a	M
$-1 \leq a < 1$	$\arcsin a + 2\pi k < x < \pi - \arcsin a + 2\pi k,\quad k \in Z$
$a < -1$	R
$a \geq 1$	$\varnothing$



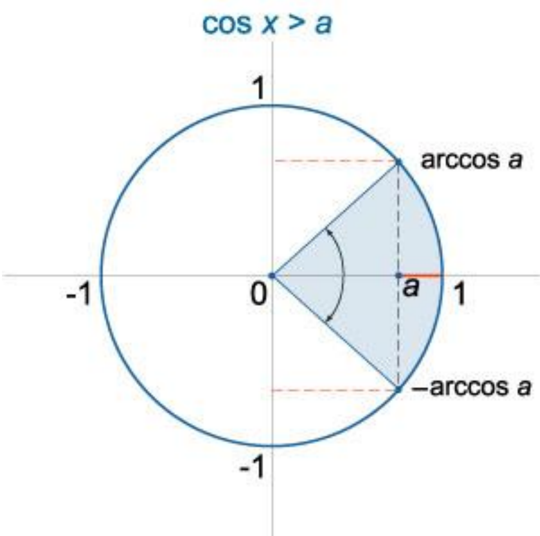


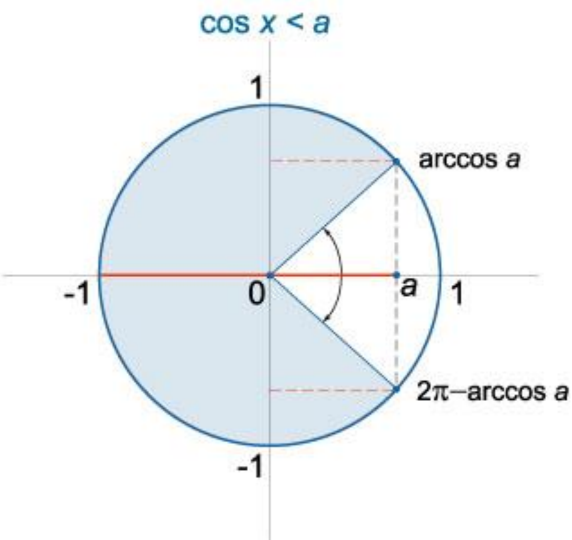
$\cos x < a.$

a	M
$-1 < a \le 1$	$\arccos a + 2\pi k < x < 2\pi - \arccos a + 2\pi k, \quad k \in Z$
$a > 1$	R
$a \le -1$	$\varnothing$

$\cos x > a.$

a	M
$-1 \le a < 1$	$-\arccos a + 2\pi k < x < \arccos a + 2\pi k, \quad k \in Z$
$a < -1$	R
$a \ge 1$	$\varnothing$





$tgx < a \;\Rightarrow -\pi/2 + \pi k < x < arctga + \pi k, \quad k \in Z.$

$tgx > a \;\Rightarrow arctga + \pi k < x < \pi/2 + \pi k, \quad k \in Z.$

$ctgx < a \;\Rightarrow arcctga + \pi k < x < \pi + \pi k, \quad k \in Z.$

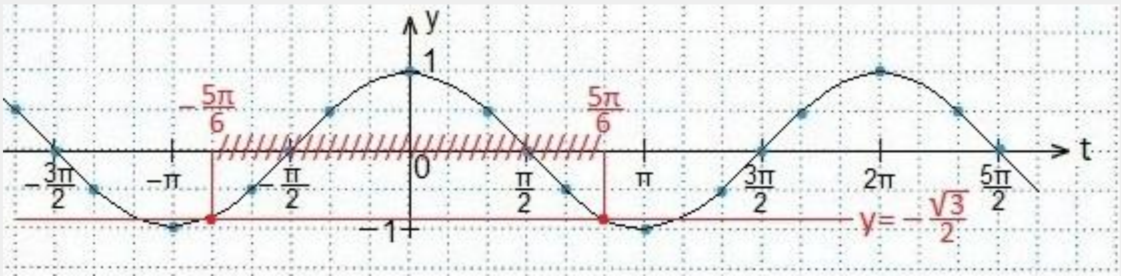
$ctgx > a \;\; \Rightarrow \pi k < x < arcctga + \pi k, \;\; k \in Z.$

Пример 1.

Решение. 1) $\cos 3x > -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Пусть 3x=t. Имеем: $\cos t > -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Строим графики функций: y=cost и $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$,

учитывая, что: $-\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos(\pi - \frac{\pi}{6}) = \cos\frac{5\pi}{6}$.



$-\frac{5\pi}{6} + 2\pi n < t < \frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z;\quad -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n < 3x < \frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z;$

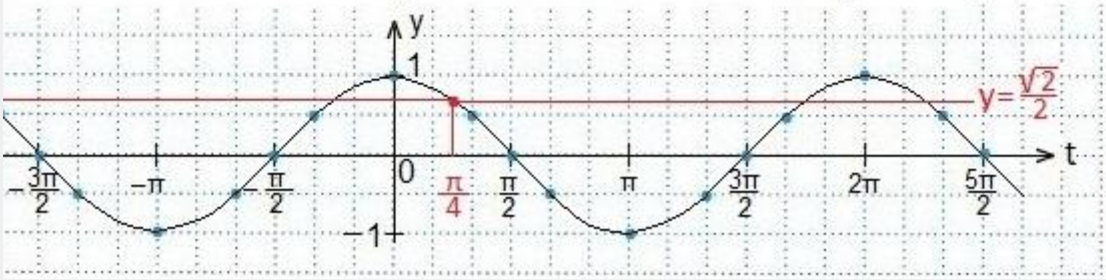
$$-\frac{5\pi}{18} + \frac{2}{3}\pi n < x < \frac{5\pi}{18} + \frac{2}{3}\pi n,\ n \in Z;$$

Ответ: $(-\frac{5\pi}{18} + \frac{2}{3}\pi n;\ \frac{5\pi}{18} + \frac{2}{3}\pi n),\ n \in Z.$

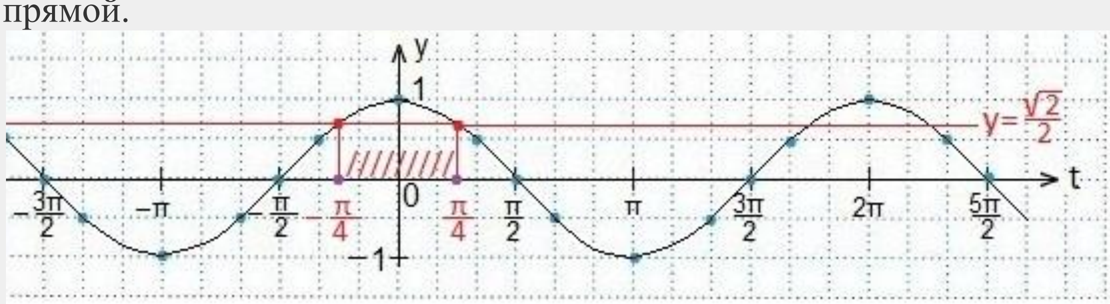
Пример 2.

Решение. 2) $\cos(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}) \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$. Замена: $\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} = t$. Тогда $\cos t \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Строим: y=cost и $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Имеем ввиду, что: $\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{\pi}{4}$



Выделяем промежуток значений **t**, при которых синусоида находится выше прямой.



$$-\frac{\pi}{4}+2\pi n \le t \le \frac{\pi}{4}+2\pi n,\ n\epsilon Z;$$

$$-\frac{\pi}{4}+2\pi n \le \frac{x}{2}+\frac{\pi}{4} \le \frac{\pi}{4}+2\pi n,\ n\epsilon Z;$$

$$-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}+2\pi n \le \frac{x}{2} \le \frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}+2\pi n,\ n\epsilon Z;$$

$$-\frac{\pi}{2}+2\pi n \le \frac{x}{2} \le 2\pi n,\ n\epsilon Z;$$

$$-\pi+4\pi n \le x \le 4\pi n,\ n\epsilon Z;$$

Ответ: $[-\pi+4\pi n;\ 4\pi n],\ n\epsilon Z.$

Контрольные вопросы.

1. Какое уравнение называется тригонометрическим?
2. Дайте определения простейших тригонометрических уравнений.
3. Назовите формулы общих решений тригонометрических уравнений вида sin x=a, cos x=a, tg x=a, ctg x=a.
4. Дать определение простейших тригонометрических неравенств.
5. Запишите формулы решений неравенств sin x > a, sin x < a.
6. Запишите формулы решений неравенств cos x> a, cos x < a.