Уважаемые студенты!

Задание

1. Прочитать внимательно лекцию.

2. Законспектировать лекцию тезисно, обязательно конспектируем примеры решения задач.

4. Фото конспекта лекций присылать на электронную почту

С уважением, Хвастова Светлана Ивановна

!!! Если возникнут вопросы обращаться по телефону 0721389311 (ватсап). Электронная почта: xvsviv@rambler.ru

Лекция на тему: «*Геометрические вероятности. Теорема сложения вероятностей. Противоположные события. Условные вероятности. Теорема умножения вероятностей. Независимые события. Вероятность появления хотя бы одного события.*»

Одним из недостатков классического определения вероятности является то, что оно неприменимо к испытаниям с бесконечным количеством исходов. В таких случаях можно воспользоваться понятием **геометрической вероятности**.

Пусть на отрезок L наудачу брошена точка. Это означает, что точка обязательно попадет на отрезок L и с равной возможностью может совпасть с любой точкой этого отрезка. При этом вероятность попадания точки на любую часть отрезка L не зависит от расположения этой части на отрезке и пропорциональна его длине. Тогда вероятность того, что брошенная точка попадет на отрезок l, являющийся частью отрезка L, вычисляется по формуле:

$$p = \frac{l}{L}, \qquad (1)$$

где l – длина отрезка l, а L – длина отрезка L.

Можно дать аналогичную постановку задачи для точки, брошенной на плоскую область S и вероятности того, что она попадет на часть этой области s:

$$p = \frac{s}{S}, \qquad (1`)$$

где s – площадь части области, а S – площадь всей области.

В трехмерном случае вероятность того, что точка, случайным образом расположенная в теле V, попадет в его часть v, задается формулой:

$$p = \frac{v}{V}, \qquad (1``)$$

где v – объем части тела, а V – объем всего тела.

Пример 1. Найти вероятность того, что точка, наудачу брошенная в круг, не попадет в правильный шестиугольник, вписанный в него.

Решение. Пусть радиус круга равен R , тогда сторона шестиугольника тоже равна R. При этом площадь круга $S = \pi R^2$, а площадь шестиугольника $s = \frac{3\sqrt{3}}{2} R^2$. Следовательно,

$$p = \frac{S - s}{S} = \frac{\pi R^2 - \frac{3\sqrt{3}}{2} R^2}{\pi R^2} = \frac{\pi - 3\sqrt{3}}{2\pi} \approx 0{,}174.$$

Пример 2. На отрезок AB случайным образом брошены три точки: C, D и M. Найти вероятность того, что из отрезков AC, AD и AM можно построить треугольник.

Решение. Обозначим длины отрезков AC, AD и AM через x, y и z и рассмотрим в качестве возможных исходов множество точек трехмерного пространства с координатами (x, y, z). Если принять длину отрезка равной 1, то эти множество возможных исходов представляет собой куб с ребром, равным 1. Тогда множество благоприятных исходов состоит из точек, для координат которых выполнены неравенства треугольника: $x + y > z$, $x + z > y$, $y + z > x$. Это часть куба, отрезанная от него плоскостями $x + y = z$, $x + z = y$, $y + z = x$

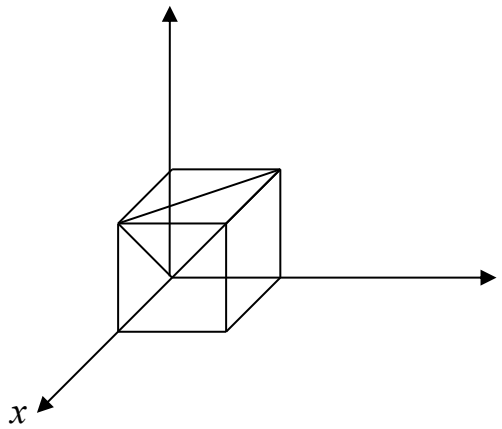

Рисунок 1

(одна из них, плоскость $x + y = z$, проведена на рис.1). Каждая такая плоскость отделяет от куба пирамиду, объем которой равен $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{6}$. Следовательно, объем оставшейся части

$v=1-3\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$. Тогда $p=\frac{v}{V}=\frac{1}{2}:1=\frac{1}{2}$.

Теорема сложения вероятностей

Теорема 1 (теорема сложения). Вероятность $p(A + B)$ суммы событий A и B равна

$$P(A+B)=p(A)+p(B)-p(AB). \qquad (2)$$

Доказательство.

Докажем теорему сложения для схемы случаев. Пусть n – число возможных исходов опыта, m_A – число исходов, благоприятных событию A, m_B – число исходов, благопри-ятных событию B, а m_{AB} – число исходов опыта, при которых происходят оба события (то есть исходов, благоприятных произведению AB). Тогда число исходов, при которых имеет место событие $A + B$, равно $m_A + m_B - m_{AB}$ (так как в сумме $(m_A + m_B)$ m_{AB} учтено дважды: как исходы, благоприятные A, и исходы, благоприятные B). Следовательно, вероятность суммы можно определить по формуле (1):

$$p(A+B)=\frac{m_A+m_B-m_{AB}}{n}=\frac{m_A}{n}+\frac{m_B}{n}-\frac{m_{AB}}{n}=p(A)+p(B)-p(AB),$$

что и требовалось доказать.

Следствие 1. Теорему 1 можно распространить на случай суммы любого числа событий. Например, для суммы трех событий *A, B* и *C*

$$P(A+B+C)=p(A)+p(B)+p(C)-p(AB)-p(AC)-p(BC)+p(ABC) \quad (3)$$

и т.д.

Следствие 2. Если события *A* и *B* несовместны, то $m_{AB} = 0$, и, следовательно, вероятность суммы несовместных событий равна сумме их вероятностей:

$$P(A+B)=p(A)p(B). \quad (4)$$

Определение 1. **Противоположными событиями** называют два несовместных события, образующих полную группу. Если одно из них назвать *A*, то второе принято обозначать $\overline{A}$.

Замечание. Таким образом, $\overline{A}$ заключается в том, что событие *A* не произошло.

Теорема 2. Сумма вероятностей противоположных событий равна 1:

$$p(A)+p(\overline{A})=1. \quad (5)$$

Доказательство.

Так как *A* и $\overline{A}$ образуют полную группу, то одно из них обязательно произойдет в результате опыта, то есть событие $A+\overline{A}$ является достоверным. Следовательно,

$P(A+\overline{A})=1$. Но, так как *A* и $\overline{A}$ несовместны, из (4) следует, что $P(A+\overline{A})=p(A)+p(\overline{A})$. Значит, $p(A)+p(\overline{A})=1$, что и требовалось доказать.

Замечание. В ряде задач проще искать не вероятность заданного события, а вероятность события, противоположного ему, а затем найти требуемую вероятность по формуле (5).

Пример. Из урны, содержащей 2 белых и 6 черных шаров, случайным образом извлекаются 5 шаров. Найти вероятность того, что вынуты шары разных цветов.

Решение. Событие $\overline{A}$, противоположное заданному, заключается в том, что из урны вынуто 5 шаров одного цвета, а так как белых шаров в ней всего два, то этот цвет может быть только черным. Множество возможных исходов опыта найдем по формуле классической вероятности:

$$n = C_8^5 = \frac{8!}{5!\cdot 3!} = \frac{6\cdot 7\cdot 8}{6} = 56,$$

а множество исходов, благоприятных событию $\overline{A}$ – это число возможных наборов по 5 шаров только из шести черных:

$$m_{\overline{A}} = C_6^5 = 6.$$

Тогда $p(\overline{A}) = \frac{6}{56} = \frac{3}{28}$, а $p(A) = 1 - \frac{3}{28} = \frac{25}{28}$.

Теорема умножения вероятностей

Определение 2. Назовем **условной вероятностью *p*(*B/A*) события *B*** вероятность события *B* при условии, что событие *A* произошло.

Замечание. Понятие условной вероятности используется в основном в случаях, когда осуществление события *A* изменяет вероятность события *B*.

Примеры:

1) пусть событие *A* – извлечение из колоды в 32 карты туза, а событие *B* – то, что и вторая вынутая из колоды карта окажется тузом. Тогда, если после первого раза карта была возвращена в колоду, то вероятность вынуть вторично туз не меняется: $p(B) = p(A) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8} = 0{,}125.$ Если же первая карта в колоду не возвращается, то осуществление события *A* приводит к тому, что в колоде осталась 31 карта, из которых только 3 туза. Поэтому $p(B/A) = \frac{3}{31} \approx 0{,}097.$

2) если событие A – попадание в самолет противника при первом выстреле из орудия, а B – при втором, то первое попадание уменьшает маневренность самолета, поэтому $p(B/A)$ увеличится по сравнению с $p(A)$.

Теорема 2.3 (теорема умножения). Вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого при условии, что первое событие произошло:

$$p(AB)=p(A)\cdot p(B/A). \qquad (2.6)$$

Доказательство.

Воспользуемся обозначениями теоремы 2.1. Тогда для вычисления $p(B/A)$ множеством возможных исходов нужно считать m_A (так как A произошло), а множеством благоприятных исходов – те, при которых произошли и A, и B (m_{AB}). Следовательно,

$$p(B/A)=\frac{m_{AB}}{m_A}=\frac{m_{AB}}{n}\cdot\frac{n}{m_A}=p(AB):p(A),$$

откуда следует утверждение теоремы.

Пример. Для поражения цели необходимо попасть в нее дважды. Вероятность первого попадания равна 0,2, затем она не меняется при промахах, но после первого попадания увеличивается вдвое. Найти вероятность того, что цель будет поражена первыми двумя выстрелами.

Решение. Пусть событие A – попадание при первом выстреле, а событие B – попадание при втором. Тогда $p\ (A) = 0{,}2$, $p\ (B/A) = 0{,}4$, $p\ (AB) = 0{,}2\cdot 0{,}4 = 0{,}08$.

Следствие. Если подобным образом вычислить вероятность события BA, совпадающего с событием AB, то получим, что $p(BA)=p(B)\cdot p(A/B)$. Следовательно,

$$p(A)\cdot p(B/A)=p(B)\cdot p(A/B). \qquad (7)$$

Определение 3. Событие B называется **независимым** от события A, если появление события A не изменяет вероятности B, то есть $p\ (B/A) = p\ (B)$.

Замечание. Если событие B не зависит от A, то и A не зависит от B. Действительно, из (2.7) следует при этом, что $p(A) \cdot p(B) = p(B) \cdot p(A/B)$, откуда $p(A/B) = p(A)$. Значит, **свойство независимости событий взаимно**.

Теорема умножения для независимых событий имеет вид:

$$p(AB)=p(A)\cdot p(B), \qquad (8)$$

то есть вероятность произведения независимых событий равна произведению их вероятностей.

При решении задач теоремы сложения и умножения обычно применяются вместе.

Пример. Два стрелка делают по одному выстрелу по мишени. Вероятности их попадания при одном выстреле равны соответственно 0,6 и 0,7. Найти вероятности следующих событий:

A – хотя бы одно попадание при двух выстрелах;

B – ровно одно попадание при двух выстрелах;

C – два попадания;

D – ни одного попадания.

Решение. Пусть событие H_1 – попадание первого стрелка, H_2 – попадание второго. Тогда

$A=H_1+H_2$, $B=H_1\cdot\overline{H}_2+\overline{H}_1\cdot H_2$, $C=H_1\cdot H_2$, $D=\overline{H}_1\cdot\overline{H}_2$. События H_1 и H_2 совместны и независимы, поэтому теорема сложения применяется в общем виде, а теорема умножения – в виде (2.8). Следовательно, $p(C)=0{,}6\cdot 0{,}7 = 0{,}42$, $p(A) = 0{,}6 + 0{,}7 - 0{,}42 = 0{,}88$,

$p(B) = 0{,}6\cdot 0{,}3 + 0{,}7\cdot 0{,}4 = 0{,}46$ (так как события $H_1\cdot\overline{H}_2$ и $\overline{H}_1\cdot H_2$ несовместны),

$p(D) = 0{,}4\cdot 0{,}3 = 0{,}12$. Заметим, что события A и D являются противоположными, поэтому

$p(A) = 1 - p(D)$.

Вероятность появления хотя бы одного события.

Теорема 2.4. Вероятность появления хотя бы одного из попарно независимых событий

$A_1, A_2,\ldots, A_n$ равна

$$p(A) = 1 - q_1q_2\ldots q_n, \qquad (9)$$

где q_i – вероятность события $\overline{A}_i$, противоположного событию A_i.

Доказательство.

Если событие A заключается в появлении хотя бы одного события из A_1, $A_2,\ldots, A_n$, то события A и $\overline{A}_1\overline{A}_2\ldots\overline{A}_n$ противоположны, поэтому по теореме 2.2 сумма их вероятностей равна 1. Кроме того, поскольку A_1, $A_2,\ldots$, A_n независимы, то независимы и $\overline{A}_1, \overline{A}_2,\ldots, \overline{A}_n$, следовательно, $p(\overline{A}_1\overline{A}_2\ldots\overline{A}_n)=$ $p(\overline{A}_1)p(\overline{A}_2)\ldots p(\overline{A}_n) = q_1q_2\ldots q_n$. Отсюда следует справедливость формулы (2.9).

Пример. Сколько нужно произвести бросков монеты, чтобы с вероятностью не менее 0,9 выпал хотя бы один герб?

Решение. Вероятность выпадения герба при одном броске равна вероятности противоположного события (выпадения цифры) и равна 0,5. Тогда вероятность выпадения хотя бы одного герба при n выстрелах равна 1-$(0,5)^n$. Тогда из решения неравенства 1- $(0,5)^n > 0,9$

следует, что $n > \log_2 10 \geq 4$.