Задание

1. Ознакомиться с примерами решения типовых задач, записать в тетрадь. Выполнить задания для самостоятельной работы.

4. Фотоотчет присылать на электронную почту в трехдневный срок

С уважением, Хвастова Светлана Ивановна

!!! Если возникнут вопросы обращаться по телефону 0721389311 (ватсап). Электронная почта: xvsviv@rambler.ru

Практическое занятие

Нахождение наибольшего, наименьшего значения и экстремальных значений функции.

Задание:

1)Перепишите и заполните пропуски (там где стоят … (три точки)):

Пример 1. Найти точку максимума функции $y= x^3 + 3x^2 - 24x + 5$.

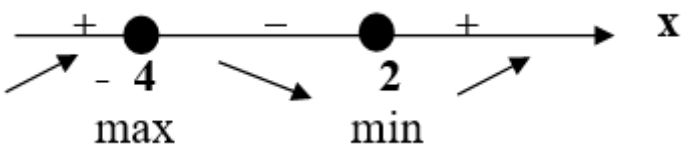
Решение: Требуется найти критическую точку, в которой знак производной меняется с плюса на минус. Область определения функции: $(-\infty, +\infty)$. Найдем критические точки функции:

$y' = 3x^2 + 6x - 24 = 3\cdot(x^2 + 2x - 8), y' = 0, x^2 + 2x - 8 = 0,$

$D = 2^2 - 4\cdot 1\cdot(-8) = 4 + 32 = \ldots,\ x_1 = (-2+6):2 = 4:2 = \ldots,\ x_2 = (-2-6):2 = -8:2 = \ldots,$

$x_1 = 2,\ x_2 = -4,$ - Критические точки.

Исследуем знак производной на интервалах, разделенных критическими точками:



Ответ: x = ...

Пример 2. Найдите точки экстремума функции и определите их характер $y= x^4 - 8x^2$.

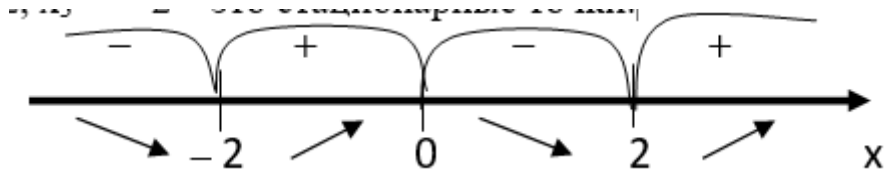
Решение: $y = x^4 - 8x^2$, $D(y) = R$, $y' = (x^4 - 8x^2)' = 4x^3 - 16x$, $y' = 0$,

$4x^3 - 16x = 0$, $4x\cdot(x^2 - 4) = 0$, $4x\cdot(x - 2)\cdot(x + 2) = 0$,

$x_1 = 0$ или $x - 2 = 0$ или $x + 2 = 0$

$x_2 = \ldots$ $x_3 = - \ldots$

$x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = -2$ – это стационарные точки.



Функция убывает на $(-\infty; -2]$, на $[0; 2]$. Функция возрастает на $[-2; 0]$, на $[2; +\infty)$.

$x_3 = -\ldots$, $x_2 = \ldots$ – это точки минимума. $x_1 = \ldots$ – это точка максимума.

Ответ: $x_3 = -2$, $x_2 = 2$– это точки минимума, $x_1 = 0$ – это точка максимума.

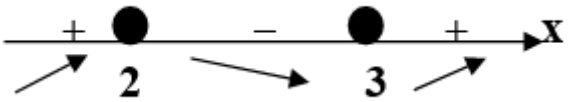
Пример 3. Найдите точки экстремума функции и определите их характер:

$y = \frac{x^3}{3} - \frac{5}{2}x^2 + 6x - 1.$

Решение: $y = \frac{x^3}{3} - \frac{5}{2}x^2 + 6x - 1$, $D(y) = R$,

$y' = (\frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x - 1)' = x^2 - 5x + 6 = (x-3)\cdot(x-2)$, $y' = 0$, $x^2 - 5x + 6 = 0$,

$x_1 = 3$, $x_2 = 2$ – это стационарные точки.



Функция возрастает на $(-\infty; 2]$, на $[3; +\infty)$.Функция убывает на $[2; 3]$.

$x_2 = \ldots$ – это точка максимума, $x_1 = \ldots$ – это точка минимума.

Ответ: $x_2 = 2$ – это точка максимума, $x_1 = 3$ – это точка минимума.

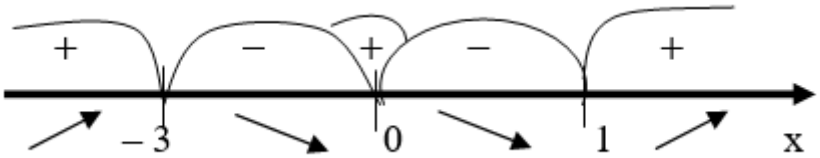
Пример 4. Найдите точки экстремума функции и определите их характер.

$y = 2x^5 + 5x^4 - 10x^3 + 3.$

Решение: $y = 2x^5 + 5x^4 - 10x^3 + 3$, $D(y) = R$, $y' = (2x^5 + 5x^4 - 10x^3 + 3)' = 2\cdot5x^4 + 5\cdot4x^3 - 10\cdot3x^2 = = \ldots x^4 + \ldots x^3 - \ldots x^2 = 10x^2\cdot(x-1)\cdot(x+3)$, $y' = 0$,

$10x^4 + 20x^3 - 30x^2 = 0$, $10x^2 \cdot (x^2 + 2x - 3) = 0$,

$x^2 = 0$ или $x^2 + 2x - 3 = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = -3$ – это стационарные точки.



Функция возрастает на $(-\infty; -3]$, на $[1; +\infty)$. Функция убывает на $[-3; 1]$.

$x_3 = ...$ – это точка максимума. $x_2 = \ldots$ – это точка минимума.

Ответ: $x_3 = -3$ – это точка максимума, $x_2 = 1$ – это точка минимума.

Пример 5. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y(x) = 2x^3 - 12x^2 + 18x + 3$ на отрезке $[-1;2]$.

Решение: 1) Вычислим значения функции в критических точках, принадлежащих данному отрезку:

$$y'(x) = (2x^3 - 12x^2 + 18x + 3)' = 6x^2 - 24x + 18 = 6 \cdot (x^2 - 4x + 3) = 0,$$

Полученное квадратное уравнение имеет два действительных корня:

$x_1 = 1$, $x_2 = 3$ – критические точки. Первая критическая точка принадлежит данному

отрезку: $x_1 = 1 \in [-1; 2]$. А вот вторая – нет: $x_2 = 1$ не $\in [-1; 2]$, поэтому про неё сразу забываем.

Вычислим значение функции в нужной точке: $y(x_1) = y(1) = 2 \cdot 1^3 - 12 \cdot 1^2 + 18 \cdot 1 + 3 = 2 - 12 + 18 + 3 = 6 + 5 = ...,$

2)Вычислим значения функции на концах отрезка: $y(-1) = 2 \cdot (-1)^3 - 12 \cdot (-1)^2 + 18 \cdot (-1) + 3 = -2 - 12 - 18 + 3 = -32 + 3 = ...,$

$$y(2) = 2 \cdot 2^3 - 12 \cdot 2^2 + 18 \cdot 2 + 3 = 16 - 48 + 36 + 3 = 4 + 3 = ...,$$

3) Дело сделано, среди чисел выбираем наибольшее и наименьшее.

Ответ: $\max\limits_{[-1;2]} y(x) = y(1) = 11, \quad \min\limits_{[-1;2]} y(x) = y(-1) = -29.$

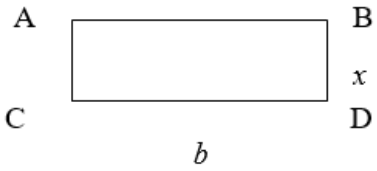
Пример 6. Число 24 представьте в виде суммы двух неотрицательных слагаемых так, чтобы сумма квадратов этих чисел была наименьшей.

Решение: Пусть x – первое слагаемое, тогда (24-x) – второе слагаемое. Сумма квадратов этих чисел $x^2+(24-x)^2=2x^2-48x+576.$ По условию задачи $0<x<24.$ Рассмотрим функцию $f(x)=2x^2-48x+576.$ Она на интервале (0;24) непрерывна и дифференцируема. Найдем критические точки. $f'(x)=4x-48. f'(x)=0;\quad 4x-48=0, 4x=48, x=...,12\in(0;24).$

Это значение единственное, поэтому первое число – 12, второе – 12.

Ответ: 24=12+12.

Пример 7. Найдите размеры участка прямоугольной формы, имеющего наибольшую площадь, если его периметр равен 200 м.



Решение: $p_{ABCD}=(x+b)\cdot 2=200,$ тогда $b=100-x$

$x\in(0;100).$ $S_{ABCD}=x\cdot b=x\cdot(100-x)=100x-x^2.$

Так как функция *S(x)* непрерывная на всей числовой прямой,

то будем искать ее наибольшее значение на отрезке $[0;100]$.

$S'(x)=100-2x, S'(x)=0;\quad 100-2x=0, 2x=100, x=..., S(0)=0; S(50)=2500; S(100)=0.$

Значит, наибольшей будет площадь участка 2500 м^2, а стороны участка равны 50 м и 50 м.

Ответ: 50 м и 50 м.

2)<u>Задание для самостоятельной работы (решить по примерам):</u>

1. Найти точку максимума функции $y = x^3 + 6x^2 - 15x + 3$.
2. Найдите точки экстремума функции а) $y = x^4 - 2x^2$,
3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = x^3 + 3x^2 - 72x + 90$ на отрезке $[-4;5]$.
4. Число 12 представьте в виде суммы двух неотрицательных слагаемых так, чтобы сумма квадратов этих чисел была наименьшей.

5. Найдите размеры участка прямоугольной формы, имеющего наибольшую площадь, если его периметр равен 120 м.