Уважаемые студенты!

Вашему вниманию представлена лекция

Задание

1. Прочитать внимательно лекцию.
2. Законспектировать лекцию в рабочую тетрадь.
3. Ответить на задание в лекции.
4. Фото конспекта лекций присылать на электронную почту (и только на электронную почту!) в трехдневный срок

С уважением, Хвастова Светлана Ивановна

!!! Если возникнут вопросы обращаться по телефону 0721389311 (ватсап).

Электронная почта: xvsviv@rambler.ru

Конъюнктивная нормальная форма

Конъюнкти́вная норма́льная фо́рма (КНФ) в булевой логике — нормальная форма, в которой булева формула имеет вид конъюнкции дизъюнкций литералов. Конъюнктивная нормальная форма удобна для автоматического доказательства теорем. Любая булева формула может быть приведена к КНФ. Для этого можно использовать: закон двойного отрицания, закон де Моргана, дистрибутивность.

Примеры и контрпримеры

Формулы **в КНФ**:

$\neg A \wedge (B \vee C)$,

$(A \vee B) \wedge (\neg B \vee C \vee \neg D) \wedge (D \vee \neg E)$,

$A \wedge B$.

Формулы **не в КНФ**:

$\neg (B \vee C)$,

$(A \wedge B) \vee C$,

$A \wedge (B \vee (D \wedge E))$.

Но эти 3 формулы не в КНФ эквивалентны следующим формулам в КНФ:

$\neg B \wedge \neg C$,

$(A \vee C) \wedge (B \vee C)$,

$A \wedge ((B \vee D) \wedge (B \vee E))$.

Построение КНФ

Алгоритм построения КНФ

1) Избавиться от всех логических операций, содержащихся в формуле, заменив их основными: конъюнкцией, дизъюнкцией, отрицанием. Это можно сделать, используя равносильные формулы:

$A \to B = \neg A \vee B$,

$A \leftrightarrow B = (\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B)$.

2) Заменить знак отрицания, относящийся ко всему выражению, знаками отрицания, относящимися к отдельным переменным высказываниям на основании формул:

$\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$,

$\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$.

3) Избавиться от знаков двойного отрицания.

4) Применить, если нужно, к операциям конъюнкции и дизъюнкции свойства дистрибутивности и формулы поглощения.

Пример построения КНФ

Приведем к КНФ формулу

$F(x, y) = (x \to y) \wedge ((\neg y \to z) \to \neg x)$

Преобразуем формулу F(x,y) к формуле, не содержащей →:

$F(x, y) = (\neg x \vee y) \wedge (\neg(\neg y \to z) \vee \neg x) = (\neg x \vee y) \wedge (\neg(\neg\neg y \vee z) \vee \neg x)$

В полученной формуле перенесем отрицание к переменным и сократим двойные отрицания:

$F(x, y) = (\neg x \vee y) \wedge ((\neg y \wedge \neg z) \vee \neg x)$

По закону дистрибутивности получим КНФ:

$F(x, y) = (\neg x \vee y) \wedge (\neg[\wedge \neg y) \wedge (\neg x \wedge \neg z)$.

k-конъюнктивная нормальная форма

k-конъюнктивной нормальной формой называют конъюнктивную нормальную форму, в которой каждая дизъюнкция содержит ровно k литералов.

Например, следующая формула записана в 2-КНФ:

$(A \vee B) \wedge (\neg B \vee C) \wedge (B \vee \neg C)$

Задача выполнимости формулы в КНФ

В теории вычислительной сложности важную роль играет задача выполнимости булевых формул в конъюнктивной нормальной форме. Согласно теореме Кука, эта задача NP-полна, и она сводится к задаче о выполнимости формул в 3-КНФ, которая сводится и к которой в свою очередь сводятся другие NP-полные задачи.

Задача о выполнимости 2-КНФ формул может быть решена за линейное время.

Особенности обозначений

Следует отметить, что для удобства восприятия в качестве обозначения конъюнкции и дизъюнкции часто используют символы арифметического умножения и сложения, при этом символ умножения часто опускается. В этом случае формулы булевой алгебры выглядят как алгебраические полиномы, что более привычно для глаза, однако иногда может привести к недоразумениям.

Например, следующие записи эквивалентны: (*В этом примере в каждой строке добавить комментарий какой символ изменился на какой другой символ)*

$(A \vee B) \wedge (\neg B \vee C \vee \neg D) \wedge (D \vee \neg E)$,

$(A \vee B) \wedge (\overline{B} \vee C \vee \overline{D}) \wedge (D \vee \overline{E})$,

$(A \vee B) \cdot (\overline{B} \vee C \vee \overline{D}) \cdot (D \vee \overline{E})$

$(A \vee B)(\overline{B} \vee C \vee \overline{D})(D \vee \overline{E})$

$(A + B)(\overline{B} + C + \overline{D})(D + \overline{E})$

По этой причине КНФ в русскоязычной литературе иногда называют «произведением сумм», что является калькой с английского термина «product of sums».