Ув. студенты! Ознакомиться с лекционным материалом и ответить на контрольные вопросы письменно. Ответы на контрольные вопросы предоставить до **17.02** на электронный адрес преподавателя vika-lnr@mail.ru

Если возникнут вопросы обращаться по телефону 072-106-54-33

ЛЕКЦИЯ

Тема: Кручение

План

1 Кручение. Крутящие моменты

2 Эпюра крутящих моментов

3 Напряжение и деформации. Расчет на прочность при сдвиге

Список использованных источников:

1 Аркуша А.И. Техническая механика. Теоретическая механика и сопротивление материалов. - М: Высшая школа, 1989

2 Ицкович Г.М. Сопротивление материалов. - М: Высшая школа, 1986

3 Эрдеди А.А. Теоретическая механика. Сопротивление материалов: учебное пособие для студ. учреждений сред. проф. образования/ А.А. Эрдеди, Н.А.Эрдеди - 9-е изд., стер.- М.- : Издательский центр «Академия», 2008.-320с.

1 Кручение. Крутящие моменты

С кручением на практике встречаются при расчете осей подвижного состава, валов трансмиссии, пружин и т.п.. В простейшем случае деформация кручения вызывается двумя противоположно направленными парами сил, которые действуют в плоскостях, перпендикулярных к оси стержня (рисунок 16.1). Стержень, который работает на кручение, называют *валом.*

Внешние моменты, которые закручивают вал, будем называть *скручивающими моментами.* Под действием этих моментов в поперечных сечениях вала, как противодействие, возникают внутренние моменты $M_к$ — *крутящие моменты.* Для определения этих моментов используется метод сечений, с помощью которого можно сформулировать такое правило для

определения крутящих моментов:

крутящий момент $M_к$ в произвольном поперечном сечении вала численно равняется алгебраической сумме скручивающих моментов, приложенных к валу с какой-то одной стороны от данного сечения. При этом положительными считаются те моменты, которые направлены против хода стрелки часов, если смотреть вдоль внешней нормали к сечению.

Рисунок 16.1 - Нагрузка вала

2 Эпюра крутящих моментов

График распределения крутящих моментов по длине вала называют ***эпюрой крутящих моментов*** *Мк.*

Пример 1. Построить эпюру крутящих моментов для вала, который изображен на рисунке 16.2.

Выражения для крутящих моментов на участках вала:

$$M_к^{AB} = -M_1 = -10 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_к^{BC} = -M_1 + M_2 = 20 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_к^{CD} = -M_1 + M_2 + M_3 = 30 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_к^{DE} = -M_1 + M_2 + M_3 - M_4 = 10 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Эпюра *М* изображена на рисунке 16.2

Для определения величины крутящих моментов нужно знать величину моментов внешних пар сил, которые передаются на вал.

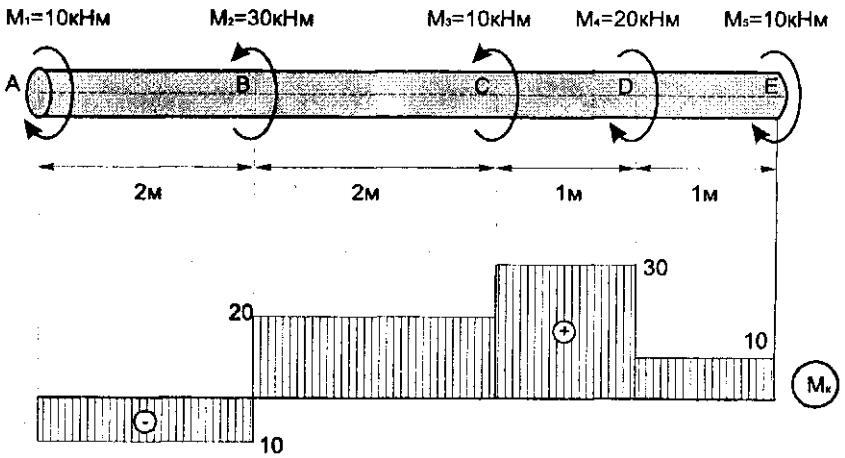

Рисунок 16.2 - Эпюра крутящих моментов

Нередко в инженерной практике эти пары неизвестны, но известны мощности *N,* которые передаются валом, и скорость вращения вала.

3 Напряжение при кручении вала круглого поперечного сечения

Крутящий момент *M ,* который в предыдущем параграфе выражался через крутящие моменты внешних сил, является суммарным моментом элементарных пар внутренних сил τ_p*d*р , связанных с касательными напряжениями $\tau_р$, что возникают в произвольной точке сечения , т.е.

$$M_к = \int \tau_\rho \cdot dA \cdot \rho = \int \tau_\rho \cdot \rho \cdot dA.$$

При этом считается, что касательные напряжения $\tau_р$ перпендикулярны к вектору ρ. Последнее выражение дает интегральную зависимость между крутящим моментом $M_к$ и касательными напряжениями tр в сечении вала. Эта зависимость может удовлетворяться при разных законах распределения $\tau_р$. Чтобы определить величину $\tau_р$, нужно знать действительный закон распределения касательных напряжений в поперечном сечении. Этот закон можно получить лишь на основе исследовательских данных.

Если закручивать стержень произвольного поперечного сечения, то плоские к началу нагрузки поперечные сечения при нагрузке перестают быть плоскими, *депланируют.* Лишь при кручении стержней круглого или кольцевого поперечных сечений депланации отсутствуют. Для таких сечений на основе исследовательских данных установлено, что при кручении:

а) поперечные сечения вала, оставаясь плоскими и перпендикулярными к его оси, поворачиваются один относительно одного на определенный угол, который называется *углом закручивания* ф;

б) расстояние между сечениями при закручивании не изменяется;

в) прямые линии (радиусы), проведенные в поперечных сечениях вала при закручивании, не искривляются, т.е. остаются прямыми.

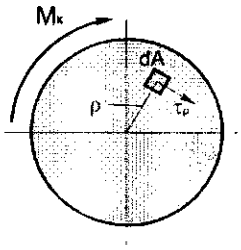

Рисунок 16.3 - Касательные напряжения

Если использовать эти факты и принять во внимание, что при кручении имеет место деформация сдвига и выполняется закон Гука при сдвиге , то получим следующий закон изменения $\tau_р$ в поперечном сечении вала

$$\tau_\rho = G \cdot \gamma_\rho = G \cdot \frac{d\varphi}{dx} \cdot \rho. \qquad (1)$$

Подставив последнее выражение для τ_ρ в формулу, получаем

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_к}{G \cdot I_p}, \qquad (2)$$

Где $I_p = \int_A \rho^2 \cdot dA$ - полярный момент инерции поперечного сечения вала.

После подстановки выражения для $\frac{d\varphi}{dx}$ в уравнение получаем формулу для касательного напряжения при кручении вала круглого сечения

$$\tau_\rho = \frac{M_к \cdot \rho}{I_p}. \qquad (3)$$

Эпюры касательных напряжений τ_ρ для круглого и кольцевого сечений вала показаны на рисунке 16.4.

Максимальное касательное напряжение возникает пj $\rho = \rho_{max}$.

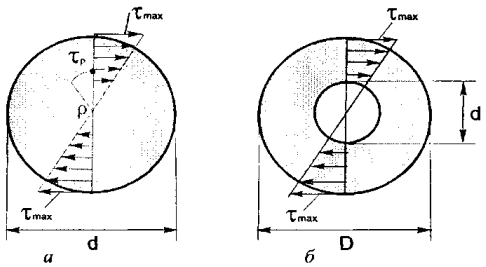

Рисунок 16.4 - Эпюры касательных напряжений

Если ввести обозначение

$$\frac{I_p}{\rho_{max}} = W_p, \qquad (4)$$

где W_p— геометрическая характеристика, которая называется *полярным моментом сопротивления* поперечного сечения, то формула для определения τ_{max} приобретает вид

$$\tau_{max} = \frac{M_к}{W_p}. \qquad (5)$$

Для круглого поперечного сечения вала с радиусом г и диаметром *d* (рисунок 16.4, *а)* полярный момент сопротивления

$$W_p = \frac{I_p}{\rho_{max}} = \frac{\pi r^4}{2} : r = \frac{\pi r^3}{2} = \frac{\pi d^3}{16} \approx 0{,}2d^3. \qquad (6)$$

Для кольцевого сечения (рисунок 16.4, *б)*

$$W_p = \frac{\pi D^4}{32}(1-\alpha^4) : \frac{D}{2} = \frac{\pi D^3}{16}(1-\alpha^4) \approx 0{,}2D^3(1-\alpha^4), \tag{7}$$

$$\alpha = \frac{d}{D}.$$

Формула для величины угла закручивания ф одного конечного сечения вала длиной ***l*** относительно второго

$$\varphi = \frac{M_к \cdot l}{G \cdot I_p}. \tag{8}$$

3 Напряжение и деформации. Расчет на прочность при сдвиге

Частный случай плоского напряженного состояния, при котором на гранях элементарного кубика, выделенного из тела, возникают лишь касательные напряжения (рисунок16.5, *а, б),* называется *чистым сдвигом.*

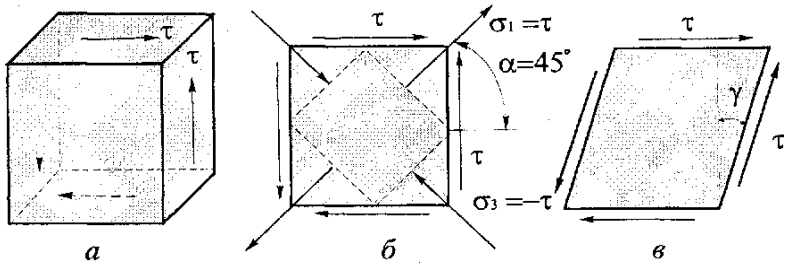

Рисунок 16.5 - Напряженное состояние при сдвиге

Величина и направление главных напряжений (рисунок 16.5, б) в этом случае такие:

$$\sigma_1 = \tau;\ \ \sigma_3 = -\tau;\ \ (\sigma_2 = 0);\ \ \alpha = \pm 45°.$$

Т.е. чистый сдвиг можно реализовать путем растяжения и сжатия в двух взаимно перпендикулярных направлениях.

По теории прочности наибольших касательных напряжений (III теория) условие прочности приобретает вид

$$\sigma_{екв}^{III} = \sigma_1 - \sigma_3 \le [\sigma],$$

$$\sigma_{екв}^{III} = \tau - (-\tau) \le [\sigma],$$

$$\sigma_{екв}^{III} = 2\tau \le [\sigma]. \tag{9}$$

Введя в последнем выражении обозначения получаем условие прочности

$$\frac{[\sigma]}{2} = [\tau], \tag{10}$$

$$\tau \le [\tau]. \tag{11}$$

По IV теории прочности получаем тоже условие прочности, только $[\sigma] = 0{,}6\ [\sigma]$.

При кручении вала на его поверхности имеет место напряженное состояние чистого сдвига с напряжениями τ_{max} (рисунок 16.6). Главные напряжения в этом случае $\sigma_1 = \tau_{max}$; $\sigma_2 = 0$; $\sigma_3 = \tau_{max}$. Если при расчете на прочность использовать III теорию прочности, то условие прочности приобретает вид

$$\sigma_{екв}^{III} = \sigma_1 - \sigma_3 \le [\sigma];$$

$$\sigma_{рас}^{III} = 2 \cdot \tau_{max} \le [\sigma]$$

$$\tau_{max} \le 0{,}5 \cdot [\sigma] \tag{12}$$

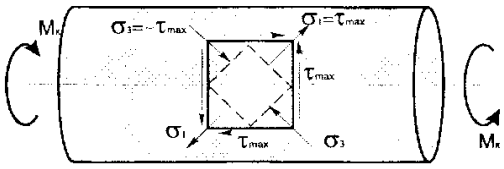

Рисунок 16.6. - Напряженное состояние при кручении

Если ввести обозначение 0,5 [а] = [т], то условие прочности приобретает вид

$$\tau_{max} = \frac{M_к}{W_p} \le [\tau]. \tag{13}$$

Если при расчете на прочность использовать IV теорию прочности, то условие прочности останется без изменения, если принять $[\tau] = 0{,}58 \cdot [\sigma]$.

Подставив в условие прочности значение W_p из формул, получим выражения для подбора диаметра d круглого вала

$$d \ge \sqrt[3]{\frac{M_к}{0{,}2[\tau]}} \tag{14}$$

и диаметров D и d кольцевого вала

$$D = \sqrt[3]{\frac{M_к}{0{,}2[\tau]\cdot(1-\alpha^4)}};\ \ d = \alpha D. \tag{15}$$

Заметим, что при передаче больших скручивающих моментов валы кольцевого сечения более рациональны. Об этом свидетельствуют эпюры τ для круглых и кольцевых валов. Из эпюры τ для круглых валов видно, что материал вала, расположенный возле его оси, почти не работает. В кольцевом вале понятие о допустимом относительном угле закручивания этого материала отсутствует.

В некоторых случаях, кроме расчета на прочность, есть необходимость выполнить и расчет вала на жесткость. Проверка жесткости заключается в сравнении максимального угла закручивания, отнесенного к единице длины вала θ_{max}, с допустимым относительным углом закручивания [θ]

$$\theta_{max} \le [\theta], \tag{16}$$

где

$$\theta_{max} = \max\left|\frac{\varphi}{l}\right|.$$

Угол закручивания φ в радианах исчисляется по формуле

$$\varphi = \frac{M_к \cdot l}{G \cdot I_p}. \tag{17}$$

Поскольку допустимые углы закручивания [θ] чаще всего задаются в градусах, то перейдя в выражени к градусам, получаем условие жесткости

$$\frac{M_к}{G \cdot I_p}\cdot\frac{180^\circ}{\pi} \le [\theta]^0. \tag{18}$$

Контрольные вопросы:

1. Напишите и объясните формулу для определения углов закручивания при кручении.
2. Запишите условие прочности при кручении.
3. Запишите условие жесткости при кручении.
4. От чего зависят коэффициенты α и β при расчете на кручение валов некруглого поперечного сечения?
5. Характеристика расчета на прочность при сдвиге