Задание:

- Повторить теоретический материал;
- Используя методические рекомендации, решить практическую работу;
- Фотоотчёт прислать в течении 3 дней со дня получения задания на hvastov@rambler.ru

Практическое занятие

(2 пары)

Тема: Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции.

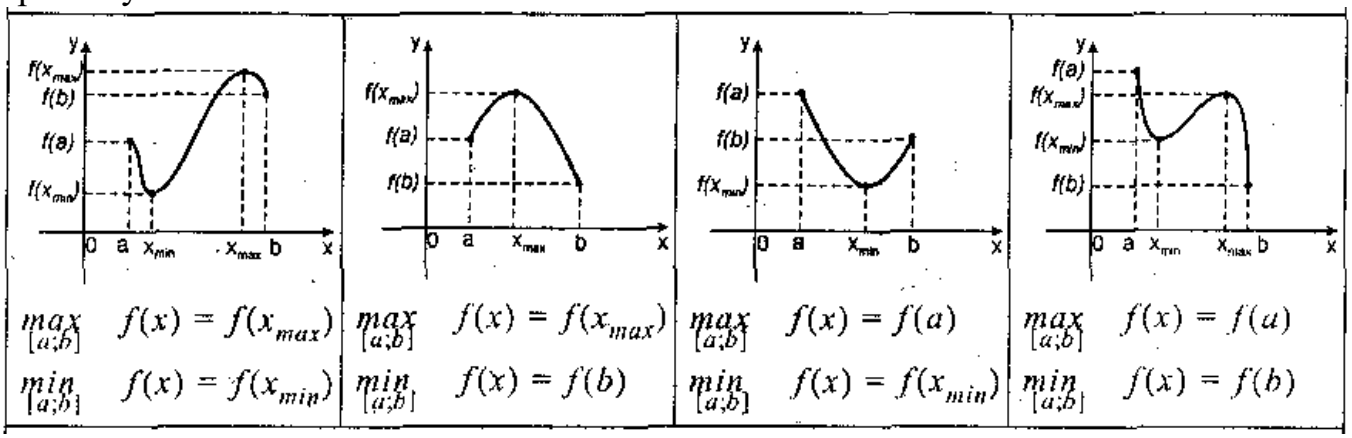
План

1. Свойство функции приобретать наибольшего и наименьшего значений
2. Исследование функции на наименьшее и наибольшее значение на отрезке
3. Применение производной к решению прикладных задач на экстремум некоторых величин

1. Свойство функции приобретать наибольшего и наименьшего значений.

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке и имеет на нем конечное число критических точек, то она приобретает своего наибольшего и наименьшего значений на этом отрезке или в критических точках, принадлежащих этом отрезке, или на концах отрезка.

Если функция $f(x)$ на промежутке имеет только одну точку экстремума $x = a$ и если это точка максимума, то $f(a)$ - наибольшее значение функции на данном промежутке. А если $x = a$ - точка минимума, то $f(a)$ - наименьшее значение функции на этом промежутке.



2. Исследование функции на наименьшее и наибольшее значение на отрезке

Если функция непрерывна на [a, b] то по теореме Вейерштрасса существует наибольшее и наименьшее значение на этом отрезке, то есть существуют точки $x_1, x_2 \epsilon [a,b]$ такие, что

$f(x_1) \le f(x) < f(x_2)$, x є $[a,b]$. С теорем о монотонность и экстремумы получаем следующий план исследования функции на наименьшее и наибольшее значение на отрезке.

План

1. Найти $f'(x)$ и ее критические точки (точки, в которых производная не существует или равна нулю).

2. Найти значение функции f в этих точках и на концах отрезка.
3. Сравнить найденные значения, выбрать наименьшее и наибольшее.

Пример. Исследовать функцию $y=\frac{x^3}{3}-x$ на абсолютные экстремумы (наибольшее и наименьшее значения) на $[0;2]$.

ОДЗ: D (y) є R. Функция элементарная, поэтому непрерывная на R, в частности на [0,2].

$y'=x^2-1$ ОДЗ: D (y) x^2-1=0 x^2=1 x= ± 1 -1 $\notin [0;2]$ - отбрасываем.

$y(1)=\frac{1}{3}-1=-\frac{2}{3}$ - Наименьшее значение.

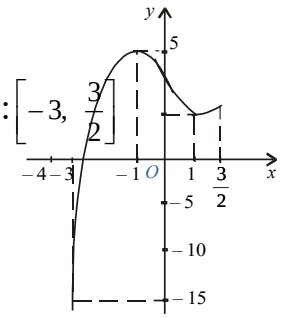
y (0) = 0

y (2) = $\frac{8}{3}-2=\frac{2}{3}$ - наибольшее значение.

Можно также указать область значений функции на данном промежутке - [-2/3; 2/3].

Замечания. Если надо исследовать функцию на наибольшее и наименьшее значения на конечном интервале (a, b), или на бесконечном $(-\infty;b);(-\infty;+\infty)$, то в плане вместо значений функции на концах промежутка ищут соответствующие односторонние границы: вместо f (a) ищут f(a+)= $\lim\limits_{x\to a+}$ f(x), вместо f (b) ищут f (b-). Так можно найти область значений функции на промежутке, потому абсолютные экстремумы не обязательно существуют в данном случае.

Пример 1. Определить на промежутке $\left[-3,\ \frac{3}{2}\right]$ наибольшее и наименьшее значения функции. $y=x^3-3x+3$



1. Находим максимумы и минимумы функции на промежутке:

$y'=3x^2-3, 3x^2-3=0,\ \ x_1=1,\ \ x_2=-1$;

$y''=6x,\ y''(1)=6>0$.

Таким образом, в точке x = 1 имеем минимум: $y_{\min}(1)=1$.

Далее, $y''(-1)=-6<0$ то есть в точке x = -1 имеем максимум: $y_{\max}(-1)=5$.

2. Определяем значение функции на концах промежутка:

$y\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{15}{8},\ \ y(-3)=-15$

3. Таким образом, наибольшее значение заданной функции на промежутке $\left[-3,\ \frac{3}{2}\right]$ є:

$y_{\text{найб}}=y_{\max}(-1)=5$,:, а наименьшее-. $y_{\text{найм}}=y(-3)=-15$

График функции изображен на рис. 1.

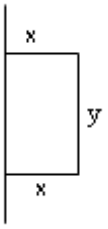
3. Применение производной к решению прикладных задач на экстремум некоторых величин

План

1.Виражають данную величину через другие величины из условия задачи так, чтобы она была функцией только от одной переменной (если это возможно).
2.Визначають промежуток изменения этой переменной.
3.Дослиджують эту функцию на наибольшее и наименьшее значения на промежутке.

Задача 1. Нужно построить прямоугольную площадку, использовав а метров сетки, у стены так, чтобы с одной стороны она прилегала к стене, а с остальных трех была ограждена сеткой. При каком соотношении сторон площадь такой площадки будет наибольшей?

S=xy – функция двух переменных. *L=x+y+x=a* *y=a-2x*



S=x (a-2x) – функция одной переменной *x;* $x \in \left[0;\frac{a}{2}\right]$.

$S=x(a-2x)=ax-2x^2$ $S'=a-4x$, $x \in R$, $S'=0$ $a-4x=0$ $x=\frac{a}{4}$;

$x=\frac{a}{4}$; $S(\frac{a}{4})=\frac{a}{4}\cdot\frac{a}{2}=\frac{a^2}{8}$ – наибольшее значение. $S(0)=0$, $S(\frac{a}{2})=\frac{a}{2}\cdot 0=0$. Найдем другую сторону прямоугольника: $y=a-\frac{a}{2}=\frac{a}{2}$.

Соотношение сторон: $\frac{y}{x}=\frac{a/2}{a/4}=2$.

Ответ. Наибольшая площадь будет равна $\frac{a^2}{8}м^2$, если сторона параллельна стены в два раза больше другой стороны.

Задача 2. На прямом берегу реки надо оградить прямоугольный участок с трех сторон. Есть материал для ограждения 400 м длиной. Как оградить участок большой площади?

Решение.

Пусть x - ширина, а y - длина прямоугольного участка. Тогда площадь участка S = xy.

Поскольку 2x + y = 400, то есть числовую функцию:

$$S=x(400-2x)=2(-x^2+200x), x\in(0;200).$$

Область определения функции S взято из тех соображений, что ширина и длина участка должны быть положительными. Исследуем теперь функцию S = S (x) на наибольшее значение на отрезке [0; 200]. Имеем $S'(x)=-4x+400$, значит $S'(x)=0$, или - 4x + 400 = 0, когда x = 100.

Задача 3. С всех прямоугольников, вписанных в круг радиуса R, найти тот, который имеет наибольшую площадь.

Решение.

Диагональ прямоугольника, который вписан в круг, равна 2R; одну из сторон прямоугольника обозначим через x, тогда вторая сторона будет $\sqrt{(2R)^2-x^2}$. Площадь прямоугольника - переменная величина; обозначим ее через y, получим:

$$y=x\sqrt{4R^2-x^2}\,(0<x<2R)$$

Исследуем эту функцию с помощью первой производной:

1) $y' = x'\sqrt{4R^2 - x^2} + \left(\sqrt{4R^2 - x^2}\right)' x = \sqrt{4R^2 - x^2} - \frac{2x \cdot x}{2\sqrt{4R^2 - x^2}} = \sqrt{4R^2 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{4R^2} - x^2} =$

$= \frac{4R^2 - 2x^2}{\sqrt{4R^2 - x^2}};$

2) $\frac{4R^2 - 2x^2}{\sqrt{4R^2 - x^2}} = 0,$

$4R^2 - 2x^2 = 0,$

$x = R\sqrt{2}.$

$y' = \frac{2(2R^2 - x^2)}{\sqrt{4R^2 - x^2}} = \frac{2\left(R\sqrt{2} - x\right)\left(R\sqrt{2} + x\right)}{\sqrt{4R^2 - x^2}};$

3) $y'_{x<R\sqrt{2}} = (+)\cdot(+) = (+);$

$y'_{x>R\sqrt{2}} = (-)\cdot(+) = (-).$

Производная меняет знак с (+) на (-), следовательно, функция при $x = R\sqrt{2}$ имеет максимум.

Стороны прямоугольника $x = R\sqrt{2}$ и $\sqrt{4R^2 - \left(R\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{4R^2 - 2R^2} = \sqrt{2R^2} = R\sqrt{2}.$

Стороны прямоугольника равны, следовательно, вписанный в круг прямоугольник наибольшей площади является квадрат.

Задача 4. Закон прямолинейного движения тела задано уравнением: $s = -t^3 + 9t^2 - 24t - 8$.

Найти максимальную скорость тела (s - в метрах, t - в секундах).

Решение.

Скорость движения тела является первая производная от пути по времени:

$v = s'' = -3t^2 + 18t - 24.$

Исследуем эту функцию на максимум и минимум с помощью второй производной:

$v'' = -6t + 18; -6t + 18 = 0; t = 3; v'' = -6.$

Вторая производная отрицательна, следовательно, скорость является крупнейшей при t = 3. найдем

значение скорости в момент t = 3:

$v(3) = -3 \cdot 3^2 + 18 \cdot 3 - 24 = 3(м/с).$

Контрольные вопросы:

1. Что называют наибольшим (наименьшим) значением функции на отрезке?
2. По какому правилу находят меньше (больше) значения функции на отрезке?

Задание:

1. Число 20 разложить на два положительных слагаемых так, чтобы их произведение было наибольшим. [10 + 10]
2. Число 36 разложить на два множителя так, чтобы сумма их квадратов была наименьшей. [6 · 6]
3. Число 64 записать в виде суммы двух положительных слагаемых, чтобы сумма их квадратов была наименьшей. [32 + 32]
4. Подать число 8 в виде суммы двух положительных слагаемых, сумма их кубов которых была наибольшей.
5. Из всех прямоугольников с плоскостью $9\,см^2$. Найти прямоугольник с наименьшим периметром. [3, 3]
6. С куска проволоки длиной $20\ см^2$ согнуть прямоугольник так, чтобы его площадь была наибольшей.
7. Точка движется прямолинейно по закону $S = -t^3 + 3t^2 + 9t + 3$. Найти максимальную скорость движения точки.
8. Точка движется прямолинейно по закону $S = t^3 - 4t^2 + 10t + 1$. В какой момент времени точка имеет наименьшую скорость и какова величина этой маленькой скорости?
9. Число 10 разбить на два положительных приложения так, чтобы сумма их кубов была наименьшей.
10. Окно имеет форму прямоугольника, периметр которого равен 8 м. Какими должны быть размеры окна, чтобы оно пропускало наибольшее количество света?
11. Прямоугольный участок земли в 10000 $м^2$ надо окопать более чем всей границей рвом. Как выбрать размеры участка, чтобы длина рва была наименьшей?
12. Найти длины катетов прямоугольного треугольника с гипотенузой 16 дм, чтобы площадь треугольника была наибольшей.