Уважаемые студенты!

- Изучите теоретический материал;
- Напишите ***краткий*** конспект;
- Выполните домашнее задание в конце лекции.
- По вопросам обращаться 072-1098278 или hvastov@rambler.ru
- Фотоотчёт конспекта прислать в течение 3 дней со дня получения задания на hvastov@rambler.ru

Тема: Свойства и графики синусов, косинусов, тангенсов, котангенсов

Цель: Изучить свойства синусов, косинусов, тангенсов, котангенсов на основе общепринятых норм. Рассмотреть их графики.

Основное отличие науки от искусства в том, что результат научного опыта, воспроизведенный разными людьми, будет одинаковым (если соблюдены основные условия проведения такого опыта). Произведение искусства каждый понимает по-своему, и единого правильного мнения о таком произведении быть не может.

Но, как мы уже знаем, точность решения задачи определяется целью. Поэтому во многих случаях мы можем с достаточной степенью точности использовать модель периодически повторяющегося процесса и решать с помощью этой модели различные задачи.

Чтобы построить математическую модель всех этих повторяющихся событий, нужен определенный инструмент – тригонометрические функции. С этим инструментом мы уже немного знакомы: умеем вычислять значения тригонометрических функций и упрощать выражения, которые их содержат. Но чтобы полноценно использовать тригонометрические функции для построения математической модели периодических процессов, нам еще нужно изучить свойства и графики этих функций, а также научиться решать уравнения и неравенства, которые их содержат.

Об уравнениях речь пойдет позже, а сегодня мы займемся свойствами и графиками тригонометрических функций.

Мы определили тригонометрические функции как функции, которые ставят в соответствие углу поворота координаты (или их отношение) соответствующей точке на окружности (см. рис. 1):

$$\sin \alpha = y_1$$

$$\cos \alpha = y_1$$

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{y_1}{x_1}$$

$$\mathrm{ctg}\alpha = \frac{x_1}{y_1}$$

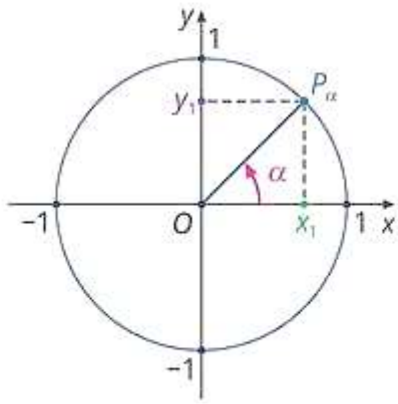

Рис. 1. Единичная окружность

Понятно, что при повороте на полный оборот значения тригонометрических функций начинают повторяться (мы каждый день наблюдаем это на примере часов: прошло 12 часов, и стрелки снова на своих местах). Поэтому тригонометрические функции будут периодическими – их значения после изменения значения аргумента на определенное число будут повторяться. Периодических функций можно ввести много, самых разных. Мы рассмотрим свойства базовых, с помощью комбинаций которых можно выразить остальные. Звуки – это механические колебания, их вокруг нас великое множество. Но при этом все их с той или иной степенью точности можно математически описать с помощью набора базовых тригонометрических функций.

Мы выделили и изучили свойства некоторых видов функций: линейной, квадратичной, функции квадратного корня и других («Свойства функций. Базовые функции»). Воспользуемся готовой схемой изучения свойств функций для тригонометрических функций:

$$y = \sin x$$

$$y = \cos x$$

$$y = \operatorname{tg} x$$

$$y = \operatorname{ctg} x$$

Правда, есть небольшая загвоздка: мы изучали **числовые функции** – в них *числу* ставится в соответствие число. В тригонометрических же функциях мы говорили, что *углу* ставится в соответствие число. Разрешить эту ситуацию просто: будем брать *величину угла*, выраженную в радианах. Под записью $y = \sin x$ будем понимать, что *числу* x ставится в соответствие *число* y. Причем так, что значение y равно синусу x радиан. Например,

$$y(2) = \sin 2 \approx 0{,}91$$

Аналогично и для косинуса, тангенса и котангенса.

Как исследовать числовые функции, мы уже знаем. Можно построить их графики и рассмотреть различные характеристики:

1. область определений и область значений;
2. нули функции, промежутки знакопостоянства;
3. промежутки монотонности: возрастания и убывания;
4. четность;
5. периодичность.

Про четность и периодичность тригонометрических функций, на самом деле, мы уже знаем. Вспомним, что функция $y = f(x)$ называется четной, если для всех ее допустимых аргументов выполняется соотношение:

$$f(-x) = f(x)$$

А для нечетных функций выполняется соотношение:

$$f(-x) = -f(x)$$

Мы знаем, что $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$, а $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$. Соответственно, функция $y = \cos x$ является *четной* функцией; $y = \sin x$ – *нечетной*.

Для тангенса и котангенса выполнены следующие соотношения:

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\operatorname{tg}\alpha$$

$$\operatorname{ctg}(-\alpha) = \frac{\cos(-\alpha)}{\sin(-\alpha)} = \frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha} = -\operatorname{ctg}\alpha$$

Значит, функции $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$ также являются нечетными.

Теперь про периодичность. Вспомним, что функция $y = f(x)$ называется периодической, если для всех ее аргументов выполняется соотношение:

$$f(x + T) = f(x);\ T \neq 0$$

Величина T называется периодом функции. Мы знаем соотношения:

$$\sin(\alpha + 2\pi) = \sin\alpha$$

$$\cos(\alpha + 2\pi) = \cos\alpha$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \pi) = \operatorname{tg}\alpha$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha + \pi) = \operatorname{ctg}\alpha$$

Значит, все тригонометрические функции являются периодическими. Причем синус и косинус имеют период 2π, а тангенс и котангенс – период π.

Об остальных свойствах и характеристиках тригонометрических функций, а также об их графиках мы поговорим далее в уроке.

Синус и косинус

Начнем с построения графика функции синуса:

$y = \sin x$

Мы знаем значения синуса для некоторых углов:

Градусы	0°	30°	45°	60°	90°
Радианы	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

По ним мы можем составить таблицу значений для нашей функции. Помним, что числовой аргумент функции x – это величина угла в радианах. Поэтому получаем следующую таблицу:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
y	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Отметим эти точки на графике и соединим плавной линией (см. рис. 2).

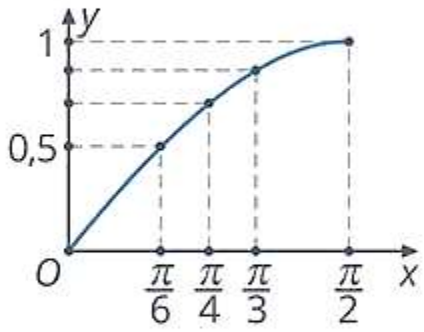

Рис. 2. Соединенные точки

Обратите внимание на масштаб оси x. Ранее мы изучали такие функции, в которых аргументом удобно было брать целые значения. Поэтому и цену деления было удобно брать целым числом. У тригонометрических же функций мы знаем значения для аргументов, пропорциональных π. Поэтому и выбираем соответствующий масштаб.

Далее воспользуемся соотношением:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$$

Его можно получить из формул приведения:

$$\left.\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \cos\alpha \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - (-\alpha)\right) = \cos(-\alpha) &= \cos\alpha \end{aligned}\right\} \Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$$

Это соотношение означает, что для аргументов, лежащих слева и справа от $\frac{\pi}{2}$ на равном расстоянии, значения синусов будут одинаковы. Получаем следующий график (см. рис. 3).

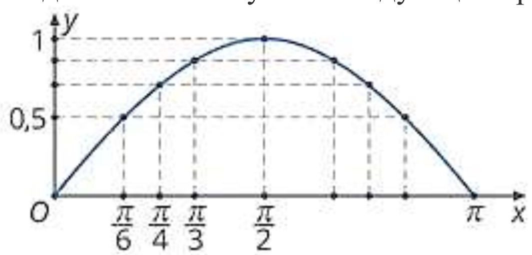

Рис. 3. Полученный график

Теперь воспользуемся тем, что синус – нечетная функция. Графики нечетных функций симметричны относительно начала координат. Отражаем график. Мы получили график функции $y = \sin x$ на промежутке от $-\pi$ до π (см. рис. 4).

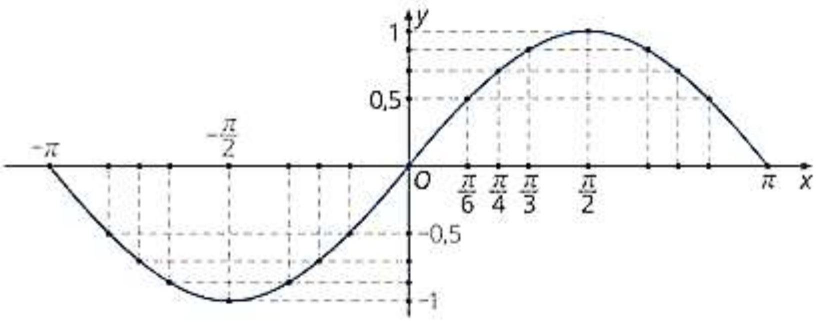

Рис. 4. График функции $y = \sin x$ на промежутке от $-\pi$ до π

Далее пользуемся периодичностью. Период синуса равен 2π, значит, прибавив к аргументу 2π, мы получим те же значения функции. Прибавляя еще или вычитая 2π, мы будем получать те же значения. Наш кусочек функции будет как бы «копироваться» влево и вправо бесконечное количество раз. Полученная линия и будет являться графиком функции $y = \sin x$ (см. рис. 5). Эту кривую еще называют синусоидой.

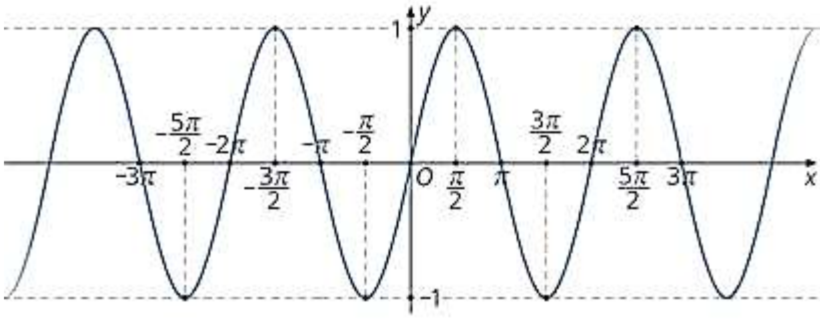

Рис. 5. График функции $y = \sin x$

Теперь отметим характеристики и свойства функции.

1. **Областью определения** являются все действительные числа:

$D(y) = R$

Мы расширили понятие угла так, что его величина может быть любым числом. А величина угла в радианах – и есть аргумент функции.

2. **Область значений**:

$E(y) = [-1; 1]$

Мы определяли синус как ординату точки на единичной окружности. Соответственно, значения синуса могут лежать только в пределах от -1 до 1.

3. **Нули функции** – это решения уравнения $\sin x = 0$. С решениями уравнений подробнее вы познакомитесь на следующем уроке. А пока можем воспользоваться графиком. Нули функции: $0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$. В общем виде это можно записать так: $\pi \cdot k$, где k – целое число.

4. **Промежутки знакопостоянства** также отметим по графику. От 0 до π функция принимает положительные значения; от π до 2π – отрицательные. Это же поведение мы видим и на других участках графика. В общем виде:

$y > 0$ **при** $x \in (0 + 2\pi k;\ \pi + 2\pi k)$

$y < 0$ **при** $x \in (\pi + 2\pi k;\ 2\pi + 2\pi k)$

$k \in Z$

5. По графику также можно определить **промежутки монотонности**. От $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$ функция возрастает; от $\frac{\pi}{2}$ до $\frac{3\pi}{2}$ – убывает. На других участках графика то же самое. Тогда в общем виде:

$y \uparrow$ **при** $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$

$y \downarrow$ **при** $x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right)$

$k \in Z$

Теперь перейдем к косинусу. Его график легко построить, воспользовавшись соотношением, которое мы уже сегодня доказывали:

$$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

Т. е. график функции $y = \cos x$ совпадает с графиком функции $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$. А этот график мы можем построить с помощью преобразования $f(x+a)$. Оно соответствует сдвигу графика на a единиц влево. Значит, для построения график функции $y = \cos x$ достаточно сдвинуть график синуса на $\frac{\pi}{2}$ влево. Вот и получили график косинуса (см. рис. 6).

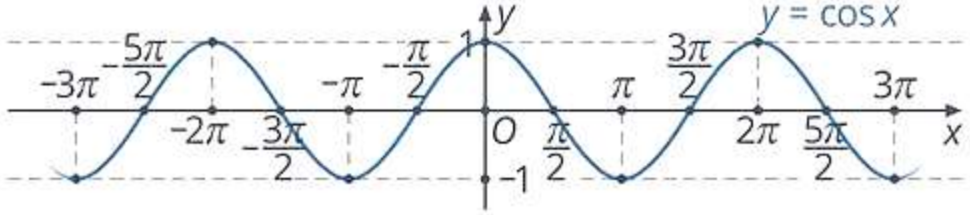

Рис. 6. График функции $y = \cos x$

Видим, что область определения и область значений у косинуса такие же, как и у синуса:

$D(y) = R$

$E(y) = [-1; 1]$

А вот нули функции, промежутки знакопостоянства и монотонности сдвинутся вместе с графиком на $\frac{\pi}{2}$ влево. Нули:

$$x = -\frac{\pi}{2} + \pi k$$

Положительные и отрицательные значения:

$$y > 0 \text{ при } x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$$

$$y < 0 \text{ при } x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right)$$

$k \in Z$

Функция возрастает и убывает при:

$y \uparrow \text{ при } x \in (-\pi + 2\pi k;\ 0 + 2\pi k)$

$y \downarrow \text{ при } x \in (0 + 2\pi k;\ \pi + 2\pi k)$

$k \in Z$

Тангенс и котангенс

Теперь перейдем к тангенсу и котангенсу. Начнем строить график тангенса по точкам.

Радианы	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Соответственно, таблица значений:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
y	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Тангенс $\frac{\pi}{2}$ не определен, ведь $\operatorname{tg}\frac{\pi}{2} = \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\cos\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{0}$, а деление на ноль не определено. Что же делать? Соединим уже имеющиеся точки и посмотрим, что будет происходить с графиком по мере приближения аргумента к $\frac{\pi}{2}$ (см. рис. 7).

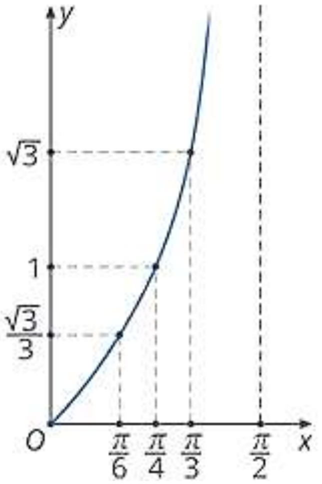

Рис. 7. Соединенные точки

$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$

$\sin x$ будет приближаться к 1, $\cos x$ – приближаться к 0, а значение дроби будет становиться все больше и больше. Т. е. значение тангенса будет все расти и расти. Но график никогда не пересечет прямую $x = \frac{\pi}{2}$, ведь при этом значении аргумента функция не определена. Подобную ситуацию мы видели на графике функции $y = \frac{1}{x}$ (см. рис. 8).

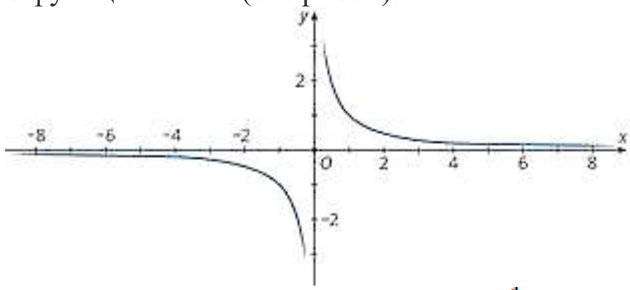

Рис. 8. График функции $y = \frac{1}{x}$

При приближении аргумента к нулю значение функции неограниченно убывало. При этом график не пересекал прямую $x = 0$. Вспомним, что подобная прямая называется **асимптотой графика**. Соответственно, асимптотой графика $y = \operatorname{tg} x$ будет прямая $x = \frac{\pi}{2}$.

Мы построили часть графика тангенса. Теперь воспользуемся тем, что эта функция нечетная. Значит, график симметричен относительно начала координат. Далее пользуемся периодичностью функции. Период тангенса равен π, значения функции будут повторяться через этот промежуток. Получили график функции $y = \operatorname{tg} x$ (см. рис. 9).

График тангенса

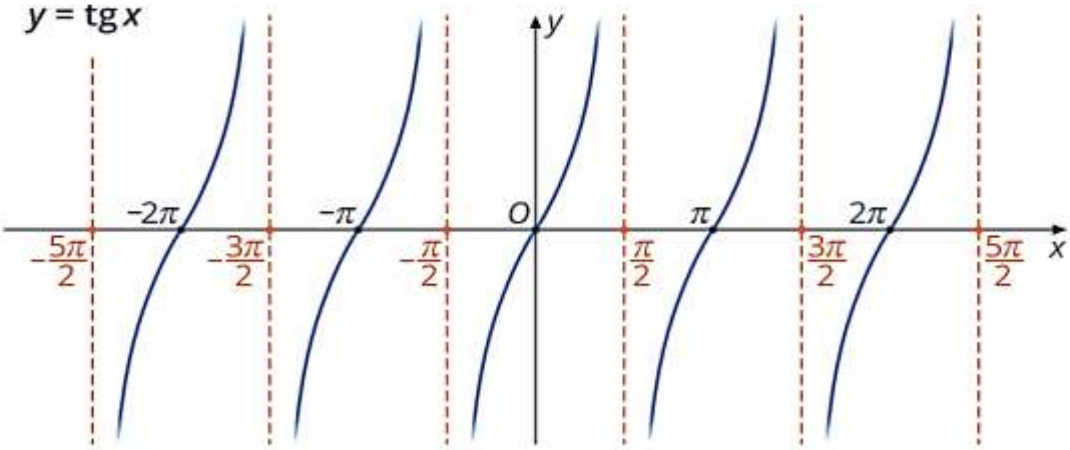

Рис. 9. График функции $y = \operatorname{tg} x$

Видим, что этот график имеет множество асимптот, уравнения которых в общем виде можно описать так:

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$$

Эти асимптоты разбивают график на отдельные части, которые еще называют **ветками тангенса**. Ветка, которая проходит через начало координат, называют **главной веткой**.

По графику определим характеристики функции $y = \text{tg } x$.

1. Область определения:

$$D(y) = R \backslash \left\{\frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z\right\}$$

2. Область значений:

$$E(y) = R$$

3. Нули функции: $0, \pm\pi, \pm 2\pi, \dots$. В общем виде все их можно описать так:

$$x = \pi \cdot k, k \in Z$$

Несложно понять, почему они совпадают с нулями синуса, если вспомнить, что тангенс – отношение синуса и косинуса, а дробь равна 0 только тогда, когда ее числитель равен 0.

4. В общем виде:

$$y > 0 \text{ при } x \in \left(0 + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$$

$$y < 0 \text{ при } x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k;\ 0 + \pi k\right)$$

$$k \in Z$$

5. На каждой своей ветке функция возрастает:

$$y \uparrow \text{при} x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$$

$$k \in Z$$

При этом корректно говорить, что функция возрастает на каждом из этих интервалов. Но *нельзя сказать*, что она возрастает на всей области определения, ведь при переходе через асимптоту функция меняет значение с положительного на отрицательное. Т. е. значение уменьшается.

Теперь, наконец, рассмотрим функцию $y = \text{ctg } x$. Для ее построения удобно воспользоваться формулой приведения:

$$\text{ctg } x = \text{tg } \left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

Т. е. нам достаточно построить график функции $y = \text{tg } \left(\frac{\pi}{2} - x\right)$. В этом нам помогут преобразования графиков. Сначала строим $y = \text{tg } (-x)$ – график тангенса отражается симметрично относительно оси y. Затем сдвигаем его на $\frac{\pi}{2}$ влево. Получаем график функции $y = \text{tg } \left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, он же будет графиком функции $y = \text{ctg } x$.

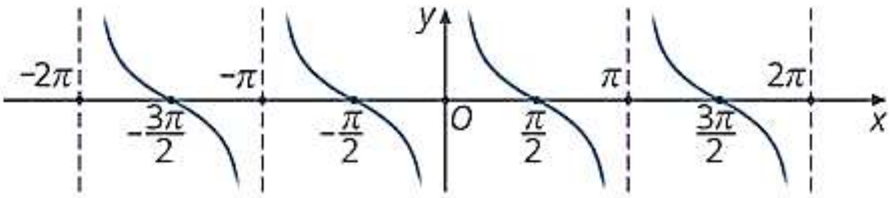

Рис. 10. График функции $y = \text{ctg } x$

Отметим характеристики.

1. Область определения:

$$D(y) = R \backslash \{\pi k, k \in Z\}$$

2. Область значений:

$$E(y) = R$$

3. Нули функции (совпадают с нулями косинуса, объясните сами, почему):
$x = -\frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$

4. В общем виде:
$y > 0$ при $x \in \left(0 + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$
$y < 0$ при $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k;\ 0 + \pi k\right)$
$k \in Z$

5. На каждой своей ветке функция убывает:
$y \downarrow$ при $x \in (0 + \pi k; \pi + \pi k)$
$k \in Z$

Преобразования графиков тригонометрических функций

Мы рассмотрели характеристики и графики тригонометрических функций $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$. Но при моделировании процессов обычно встречаются более сложные функции, например:

$y = -2\sin 5x$

Чтобы исследовать подобные функции, достаточно применить преобразования графиков к уже изученным. Вспомним эти преобразования (можете пересмотреть соответствующие уроки «Повторение и систематизация курса алгебры 7-9 класса. Функции», «Преобразование графиков функций»).

1. Прибавление числа к функции $y = f(x) + b$ сдвигает график вдоль оси y.
2. Прибавление числа к аргументу $y = f(x + b)$ сдвигает график вдоль оси x.
3. Умножение значения функции на число $y = b \cdot f(x)$ растягивает или сжимает график вдоль оси y. Если $b < 0$, то еще и симметрично отражает график относительно оси x.
4. Умножение аргумента на число $y = f(b \cdot x)$ растягивает или сжимает график вдоль оси *x*. Если $b < 0$, то еще и симметрично отражает график относительно оси y.

Соответственно, чтобы построить график функции $y = -2\sin 5x$, необходимо:

1. Построить график функции $y = \sin x$ (см. рис. 11).

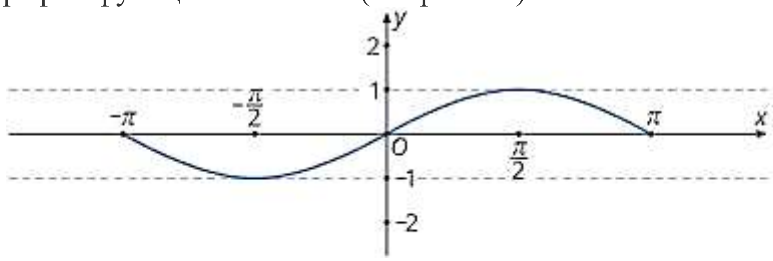

Рис. 11. График функции $y = \sin x$

2. Сжать его вдоль оси x в 5 раз, получив график $y = \sin 5x$ (см. рис. 12).

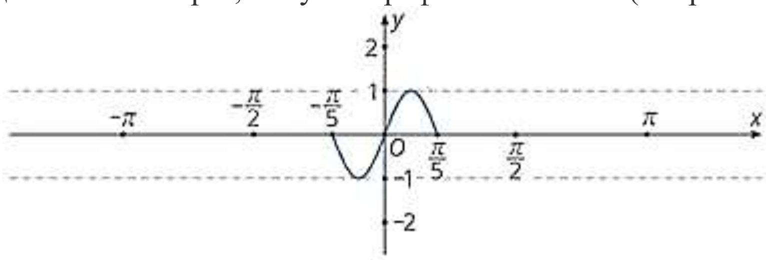

Рис. 12. График функции $y = \sin 5x$

3. Растянуть его вдоль оси y (см. рис. 13), а затем симметрично отразить относительно оси x. В итоге получим график функции $y = -2\sin 5x$ (см. рис. 14).

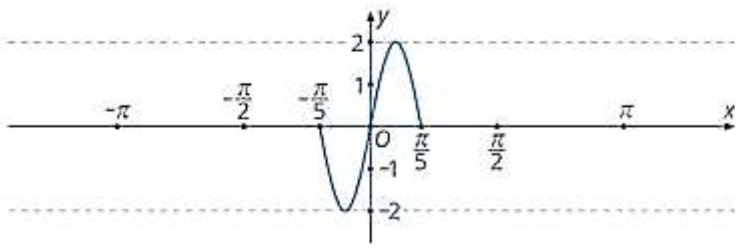

Рис. 13. График функции $y = 2\sin 5x$

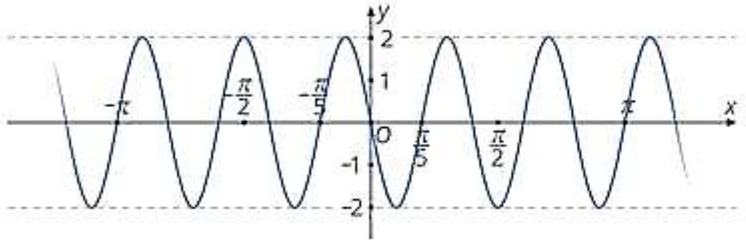

Рис. 14. График функции $y = -2\sin 5x$

По построенному графику функции можно указать все ее свойства. В частности, стоит обратить внимание, что у данной функции изменилась область значений и период по сравнению с функцией $y = \sin x$. Область значений данной функции: $E(y) = [-2; 2]$.

Период был 2π, после сжатия вдоль оси x он уменьшился в 5 раз:

$$T = \frac{2\pi}{5}$$

В общем случае про изменение области значений и периода функций можно сказать следующее.

- При преобразованиях вида $y = f(x) + b$ и $y = b \cdot f(x)$ соответствующим образом изменяется область значений: сдвигается на b или расширяется/сужается в b раз.
- При преобразовании вида $y = f(b \cdot x)$ период функций увеличивается или уменьшается в b раз.
- При преобразовании вида $y = f(x + b)$ период функции и ее область значений остается прежней.

Итак, применяя различные преобразования графиков, мы можем исследовать тригонометрические функции вида $y = a + b\sin(cx + d)$, где a, b, c, d – некоторые числа. Аналогично и для косинусов, тангенсов и котангенсов. Но в математической модели могут встретиться и другие тригонометрические выражения. Например, при колебаниях математического маятника зависимость его скорости от времени выглядит следующим образом:

$$v = v_{max} \cdot \sin(\omega t)$$

Тогда выражение для кинетической энергии принимает вид:

$$E = \frac{mv^2}{2} = \frac{mv_{max}^2 \sin^2(\omega t)}{2}$$

Константы m, v_{max}^2 и деление на 2 можем объединить в одну положительную константу A. Получим функцию кинетической энергии от времени: $E(t) = A \cdot \sin^2(\omega t)$, где A, ω – некоторые числа. Как видите, здесь мы столкнулись с квадратом тригонометрической функции. Как же ее исследовать? Здесь нам поможет известный нам математический прием: свести нашу задачу к той, решение которой мы знаем.

Для начала перейдем к более привычным обозначениям:

$$y(x) = A \cdot \sin^2(k \cdot x)$$

Теперь используем формулу понижения степени:

$$\sin^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

Получаем:

$$y(x) = A \cdot \frac{1-\cos(2k \cdot x)}{2} = \frac{A}{2} - \frac{A}{2} \cdot \cos(2k \cdot x)$$

А уже эту функцию мы уже знаем, как исследовать. Здесь нам помогут преобразования графиков. Базовая функция (см. рис. 15):

$y(x) = \cos x$

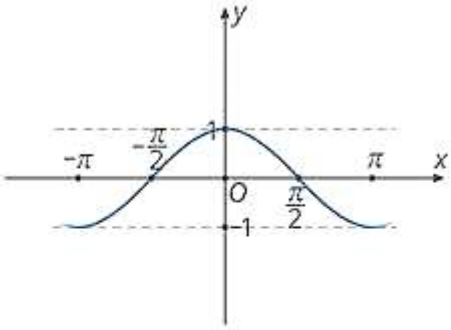

Рис. 15. График функции $y(x) = \cos x$

Умножаем аргумент на $2k$:

$y(x) = \cos(2k \cdot x)$

При этом график сожмется вдоль оси x в $2k$ раз (см. рис. 16).

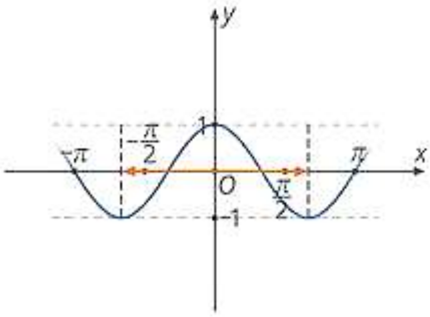

Рис. 16. График функции $y(x) = \cos(2k \cdot x)$

Период функции станет в $2k$ раз меньше:

$$T = \frac{2\pi}{2k} = \frac{\pi}{k}$$

Далее умножаем функцию на $-\frac{A}{2}$:

$$y(x) = -\frac{A}{2} \cdot \cos(2k \cdot x)$$

График растягивается вдоль оси y в $\frac{A}{2}$ раз и отражается симметрично относительно оси x (см. рис. 17).

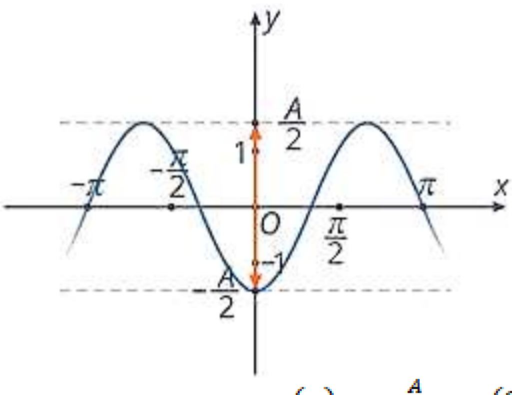

Рис. 17. График функции $y(x) = -\frac{A}{2} \cdot \cos(2k \cdot x)$

При этом область значений расширяется в $\frac{A}{2}$ раз: было $-1 \le y(x) \le 1$, станет:

$-\frac{A}{2} \le y(x) \le \frac{A}{2}$

И наконец, прибавляем $\frac{A}{2}$:

$y(x) = \frac{A}{2} - \frac{A}{2} \cdot \cos(2k \cdot x)$

График поднимается на $\frac{A}{2}$ (см. рис. 18).

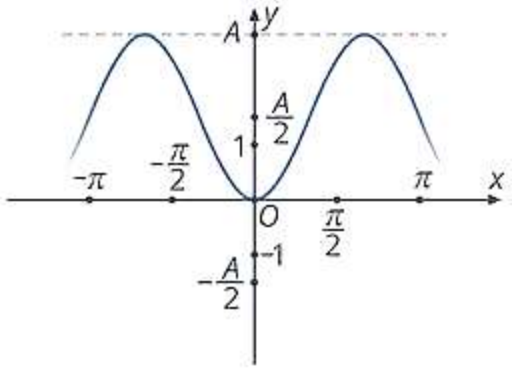

Рис. 18. График функции $y(x) = \frac{A}{2} - \frac{A}{2} \cdot \cos(2k \cdot x)$

Область значений также смещается на $\frac{A}{2}$:

$0 \le y(x) \le A$

Таким образом, мы смогли исследовать функцию, содержащую квадрат тригонометрической функции. Посмотрели, какой будет ее область значений и ее период.

Домашнее задание

1. Определить промежутки возрастания (убывания) функции $y = \cos x$ на промежутке $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$.
2. Найти множество значений функции $y = \operatorname{tg} x$, если $x \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}\right]$.
3. Построить график функции: $y = 2\sin x - 1$.