Уважаемые студенты!

- Изучите теорию.
- Напишите конспект не менее 4-5 страниц.
- Для закрепления изученного материала вы должны ответьте на контрольные вопросы;
- Фотоотчет конспекта лекции предоставить на электронную почту hvastov@rambler.ru, при возникновении вопросов обращаться по телефону 0721098278 (WatsApp).

ЦИЛИНДР И ЕГО СВОЙСТВА. СЕЧЕНИЯ ЦИЛИНДРА. КОНУС, СЕЧЕНИЯ КОНУСА.

План

1. Определение цилиндра. Элементы цилиндра.
2. Свойства цилиндра.
3. Сечения цилиндра
4. Определение конуса и его элементов.
5. Виды конусов.
6. Сечения конусов.

1. Определение цилиндра. Элементы цилиндра.

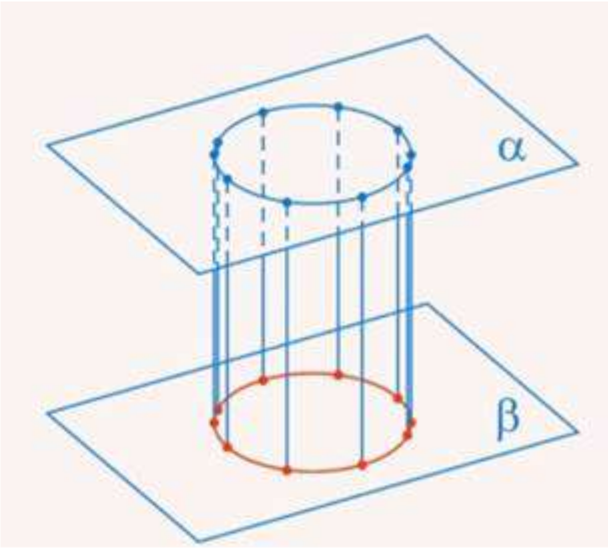

Рисунок 1 – Цилиндр

Рассмотрим произвольные параллельные плоскости α и β. В плоскости α рассмотрим окружность с центром в точке O радиуса R. Теперь проведем через каждую точку этой окружности прямую (не лежащую в данной плоскости) так, чтобы все проведенные прямые были параллельны. Эти прямые пересекут плоскость β по другой окружности того же радиуса (см. рисунок 1). Совокупность параллельных прямых, соединяющих точки на окружностях, называется цилиндрической поверхностью, а сами прямые – образующими цилиндрической поверхности. Круговым цилиндром называется тело в пространстве, ограниченное двумя кругами и цилиндрической поверхностью (см. рисунок 2).

Само слово цилиндр происходит от греческого «цилиндрос» – валик, каток. Напомним, цилиндр, который мы рассматриваем, еще называют круговым, так как в основаниях лежат круги. Если рассмотреть другую фигуру (например, эллипс), то получится эллиптический цилиндр.

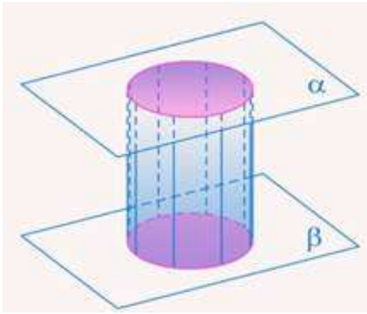

Рисунок 2 – Круговой цилиндр

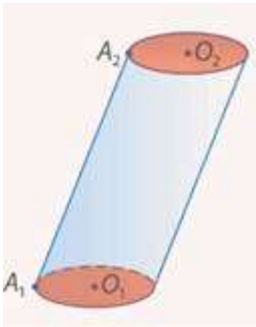

Рисунок 3 – Основания и радиусы

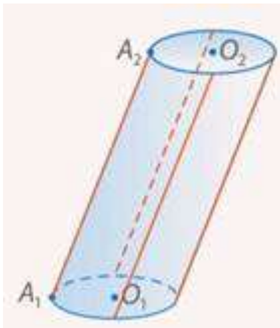

Рисунок 4 – Образующие цилиндра

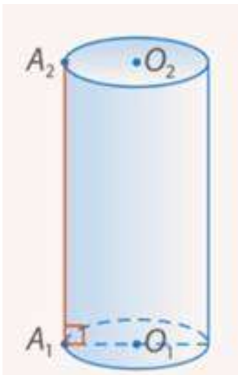

Рисунок 5 – Прямой цилиндр

Круги – основания цилиндра. Радиус каждого из оснований (они равны) – радиус цилиндра (см. рисунок 3). Отрезки образующих, заключенные между основаниями, – образующие цилиндра (см. рисунок 4).

Если образующие перпендикулярны основаниям цилиндра, такой цилиндр называется прямым (см. рисунок 5).

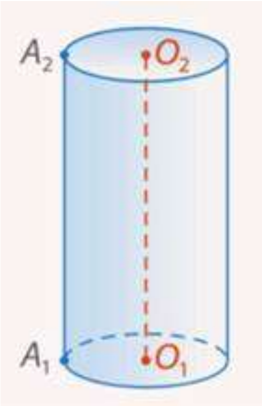

Рисунок 6 – Ось цилиндра

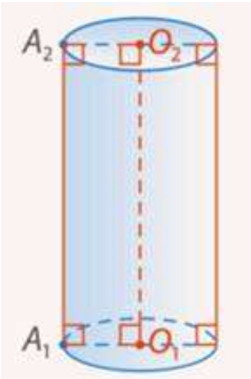

Рисунок 7 – Высота

Отрезок, соединяющий центры оснований такого цилиндра, – ось цилиндра (см. рисунок 6). Высотой цилиндра назовем отрезок, соединяющий точки его оснований и перпендикулярный основаниям. Высотой прямого кругового цилиндра является ось (или образующая) – все равно: они в прямом круговом цилиндре равны (см. рисунок 7). Цилиндр – тело вращения, которое получается при вращении прямоугольника вокруг его стороны. Прямоугольник ABO_1O (см. рисунок 8) будем вращать относительно прямой O_1O, каждая точка отрезка AB опишет окружность радиуса r, таким образом мы получим цилиндр.

Прямоугольник задают два элемента, например сторона BO_1 и сторона AB. Так же и цилиндр задают два элемента $BO_1 = r$ – радиус цилиндра, $AB = l$ – образующая цилиндра, равная высоте цилиндра ($l = h$).

Если развернуть цилиндр, то получим прямоугольник (см. рисунок 9), у которого одна сторона равна $B'B = 2\pi r$ (длина окружности основания), а другая сторона равна $AB = h$ (высота цилиндра).

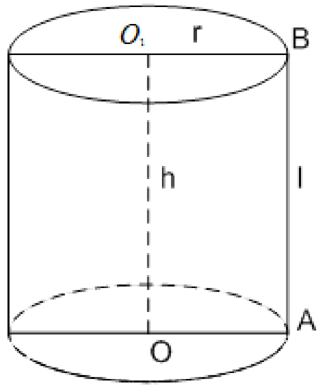

Рисунок 8 – Прямоугольник OO_1BA

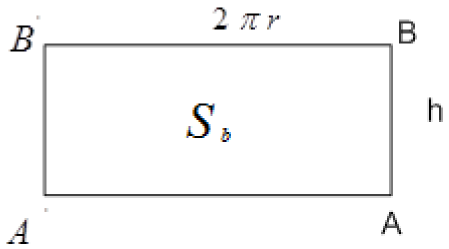

Рисунок 9 – Развернутый цилиндр

2. Свойства цилиндра:

1. Основания цилиндра равны и параллельны.
2. Образующие цилиндра равны и параллельны.
3. Высота цилиндра равна его образующей.
4. Цилиндр можно получить вращением прямоугольного треугольника вокруг его стороны.

3. Сечения цилиндра

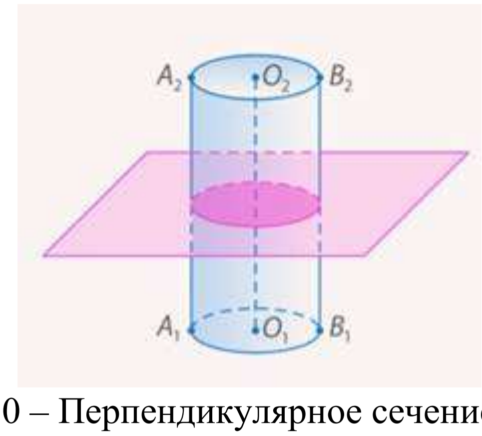

Рисунок 10 – Перпендикулярное сечение цилиндра

Это перпендикулярное сечение цилиндра – то есть сечение, перпендикулярное оси. Несложно понять, что, где бы мы его ни провели, в сечении будет такой же круг, что и в любом из оснований (см. рисунок 10).

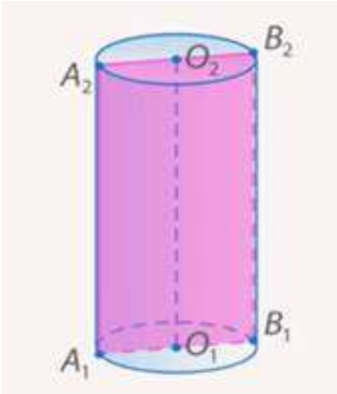

Рисунок 11 – Осевое сечение

Осевое сечение – это сечение, проходящее через ось цилиндра. В этом случае оно представляет собой прямоугольник, одна сторона которого равна образующей (или оси), а другая является диаметром основания. Именно вращая такое сечение вокруг оси, мы и получаем наш цилиндр (см. рисунок 11).

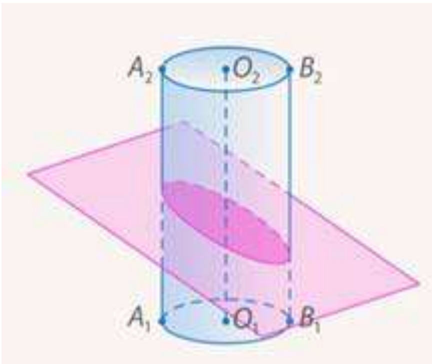

Рисунок 12 – Неперпендикулярное сечение

Наконец, можно говорить и о неперпендикулярном сечении, то есть под углом. В этом случае сечение получится в форме эллипса (см. рисунок 12).

Задача 1. Диагональ осевого сечения цилиндра равна 48 см. Угол между этой диагональю и образующей цилиндра равен $60°$.

Найти:

а) высоту цилиндра;

б) радиус основания цилиндра.

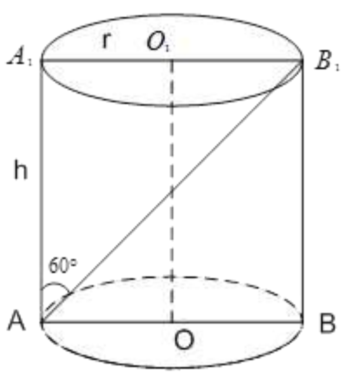

Рисунок 13 – Иллюстрация к задаче 1

Дано: $AB_1 = 48$ см; $\angle A_1AB_1 = 60°$

Найти: а) $AA_1 = h$; б) $O_1A_1 = r$

Решение: В осевом сечении цилиндра лежит прямоугольник AA_1B_1B, в котором сторона $AA_1 = h$ – высота цилиндра; $A_1B_1 = 2r$ – диаметр основания цилиндра.

Рассмотрим прямоугольный треугольник ΔAA_1B_1. В нём заданы два элемента: гипотенуза $AB_1 = 48$ см и $\angle A_1AB_1 = 60°$, следовательно:

а) $AA_1 = h = AB_1 \cdot \cos\angle A_1AB_1$

$AA_1 = h = 48 \cdot \cos 60° = 48 \cdot \frac{1}{2} = 24$ см

б) $A_1B_1 = 2r = AB_1 \cdot \sin\angle A_1AB_1$

$A_1B_1 = 2r = 48 \cdot \sin 60° = 48 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 24\sqrt{3}$

$O_1A_1 = r = \frac{A_1B_1}{2}$

$O_1A_1 = r = \frac{24\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3}$ см

Ответ: а) $AA_1 = h = 24$ см; б) $O_1A_1 = r = 12\sqrt{3}$ см

Задача 2. Высота цилиндра равна 8 см, радиус основания – 5 см. Цилиндр пересечен плоскостью параллельно его оси так, что в сечении получился квадрат. Найти расстояние от оси до плоскости этого сечения.

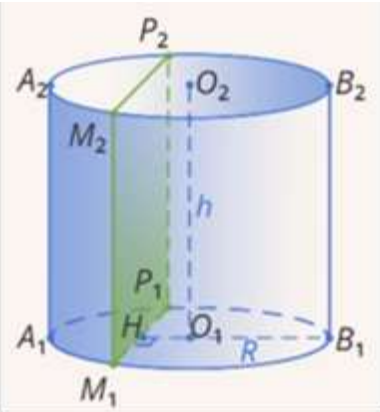

Рисунок 14 – Цилиндр, иллюстрирующий условие

Решение

Для начала поймем, что надо найти. Искомое расстояние – перпендикуляр из центра основания на хорду, отсекаемую в основании. Докажем это. Во–первых, данный отрезок перпендикулярен оси (а по определению расстояния, искомый отрезок должен быть перпендикулярен и оси, и плоскости сечения). Во–вторых, он перпендикулярен хорде и образующей, лежащим в плоскости сечения, а тогда, по признаку, он перпендикулярен всей плоскости. Очевидно, одна из сторон квадрата равна высоте, т. е. оси, а значит, и вторая равна ей же. Таким образом, сечение отсекает от основания хорду длиной 8 см.

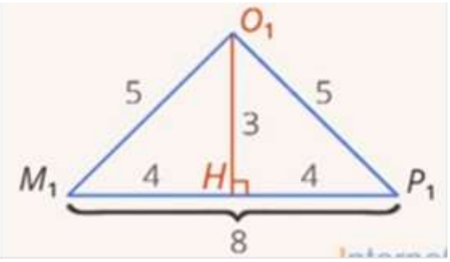

Рисунок 15 – Выносной рисунок фигуры в нижнем основании

Сделаем отдельный рисунок окружности нижнего основания. Радиус окружности – 5, хорда длины – 8, нужно найти расстояние от радиуса до хорды. Очевидно, это просто высота равнобедренного треугольника с боковой стороной 5 и основой 8. Найти ее несложно: она же является и медианой, значит, делит хорду на 4 и 4. Так что искомое расстояние равно 3 по теореме Пифагора (или из того, что треугольник египетский).

Ответ: 3 см.

4. Определение конуса и его элементов

Конусом называется тело, которое состоит из круга – основания конуса, точки, не лежащей в плоскости этого круга, – вершины конуса и всех отрезков, соединяющих вершину конуса с точками основания.

Отрезки, соединяющие вершину конуса с точками окружности основания, называются образующими конуса. Поверхность конуса состоит из основания и боковой поверхности.

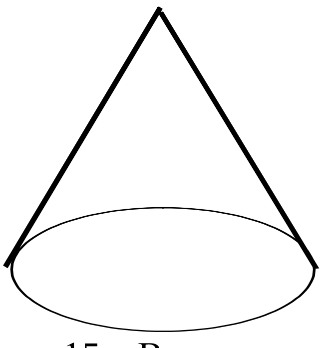

Рисунок 15 – Вершина конуса

5. Виды конусов

Конус называется прямым, если прямая, соединяющая вершину конуса с центром основания является его высотой.

Высотой конуса называется перпендикуляр, опущенный из его вершины на плоскость основания. У прямого конуса основание высоты совпадает с центром основания. Осью прямого кругового конуса называется прямая, содержащая его высоту.

6. Сечения конуса плоскостями

Сечение конуса плоскостью, проходящей через его вершину, представляет собой равнобедренный треугольник, у которого боковые стороны являются образующими конуса (см. рисунок 16). В частности, равнобедренным треугольником является осевое сечение конуса. Это сечение, которое проходит через ось конуса (см. рисунок 17).

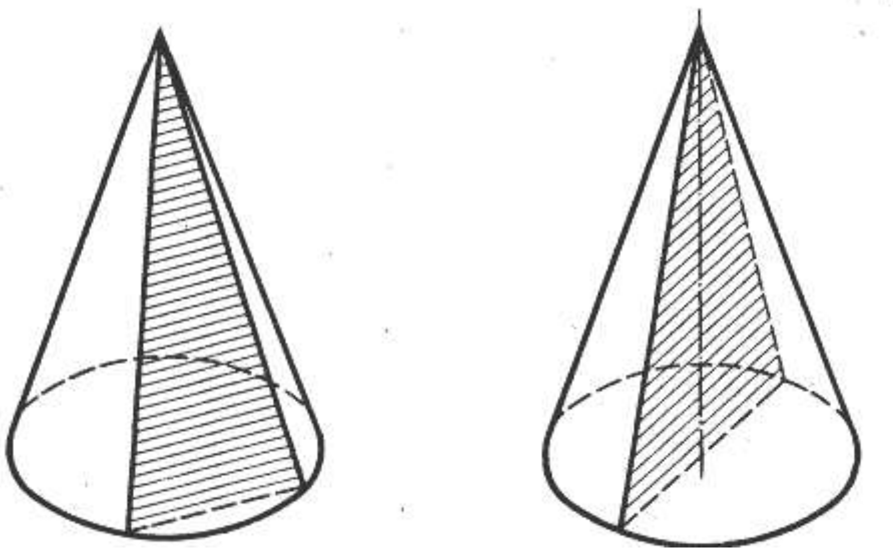

Рисунок 16 – Сечение конуса

Теорема. Плоскость, параллельная плоскости основания конуса, пересекает конус по кругу, а боковую поверхность – по окружности с центром на оси конуса.

Доказательство. Пусть β – плоскость, параллельная плоскости основания конуса и пересекающая конус (см. рисунок 18). Преобразование гомотетии относительно вершины конуса, совмещающее β плоскость с плоскостью основания, совмещает сечение конуса плоскостью β с основанием конуса. Следовательно, сечение конуса плоскостью есть круг, а сечение боковой поверхности – окружность с центром на оси конуса. Теорема доказана.

Плоскость, параллельная основанию конуса и пересекающая конус, отсекает от него меньший конус. Оставшаяся часть называется усеченным конусом (см. рисунок 17).

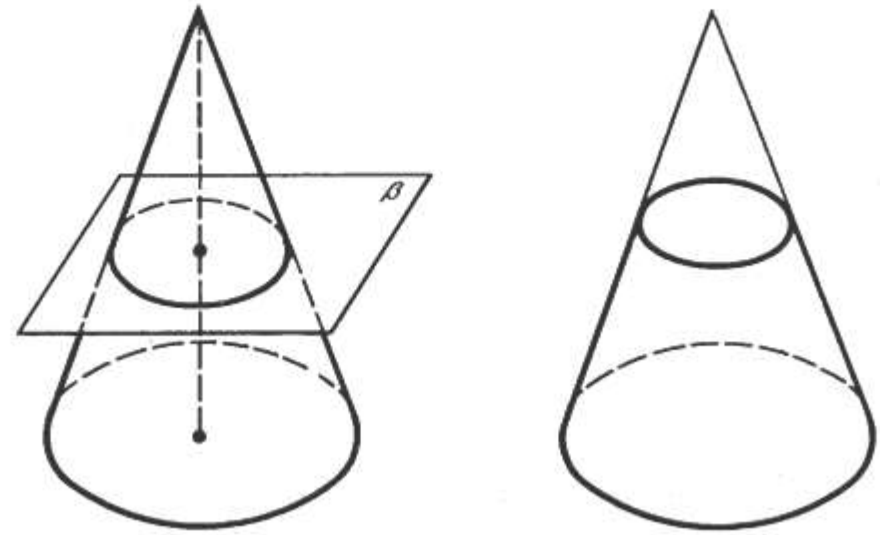

Рисунок 18 – Плоскость, параллельная основанию конуса

Контрольные вопросы

1. Дайте определение цилиндра и его элементов.
2. Какой цилиндр называется прямым?
3. Назовите свойства цилиндра.
4. Перечислите и изобразите сечения цилиндра.
5. Объясните что такое конус?
6. Какой конус называется прямым?
7. Что такое радиус конуса?
8. Что такое высота конуса?
9. Что такое ось конуса?
10. Какие сечения конуса вам известны?