

Задание:

- Изучить теорию;
- Написать краткий конспект;
- Разобрать примеры решения;
- Ответить на вопросы;
- По вопросам обращаться 072-1098278 или hvastov@rambler.ru
- Фотоотчёт конспекта прислать в течении 3 дней со дня получения задания на hvastov@rambler.ru

Тема: Применение производной к исследованию функций. Общая схема исследования функции. Построение графиков.

Цель: Используя алгоритм исследования функции, научиться исследовать функцию и строить график.

План.

1. Применение производной к исследованию функций.
2. Промежутки монотонности функции (промежутки возрастания и убывания).
3. Необходимый признак возрастания (убывания) функции.
4. Правило нахождения интервалов монотонности функции $f(x)$.
5. Точки минимума.
6. Точки максимума.
7. Точки экстремума функции.
8. План исследования функции и построения ее графика

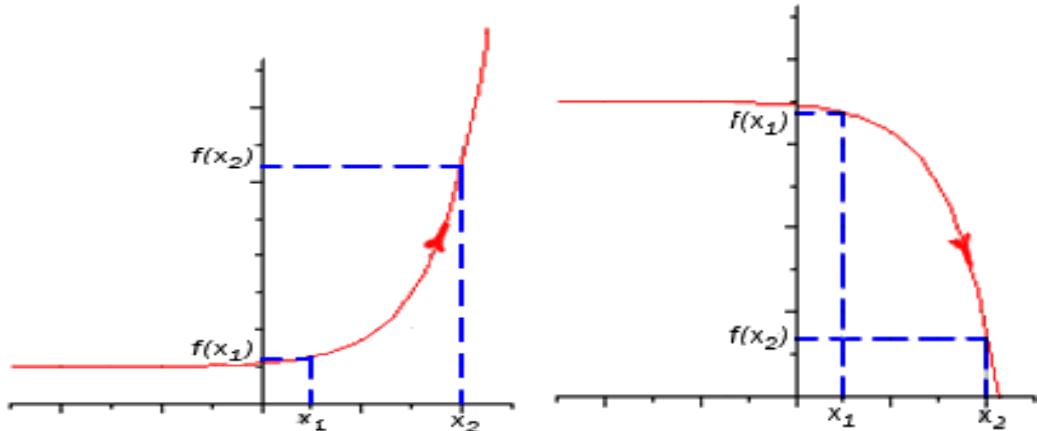
Понятие производной – одно из важнейших в математике. С помощью производной учитывая её механический смысл и геометрический смысл, можно решать самые разнообразные задачи, относящиеся к любой области человеческой деятельности. В частности, с помощью производных стало возможным подробное исследование функций, что позволило очень точно строить их графики, находить их наибольшие и наименьшие значения и т. д.

Одной из основных задач, возникающих при исследовании функции, является нахождение промежутков монотонности функции (промежутков возрастания и убывания).

Такой анализ легко сделать с помощью производной.

Но прежде чем приступить к исследованию функций на монотонность вспомним, какие функции называются возрастающими (убывающими).

Функция $y=f(x)$ называется возрастающей в некотором интервале, если в точках этого интервала большему значению аргумента соответствует большее значение функции, и убывающей, если большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции.

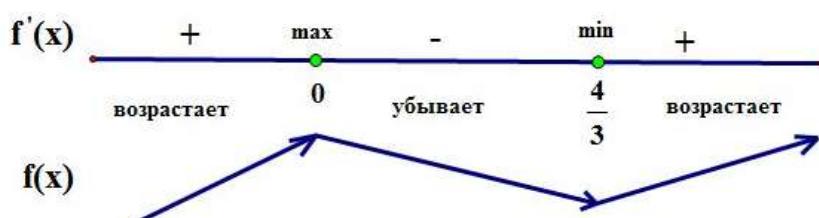


Необходимый признак возрастания (убывания) функции.

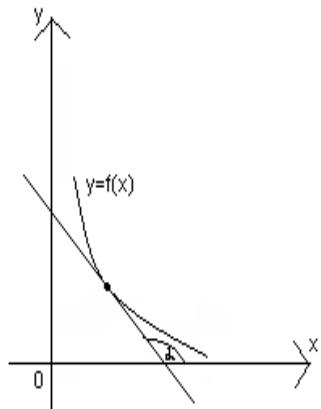
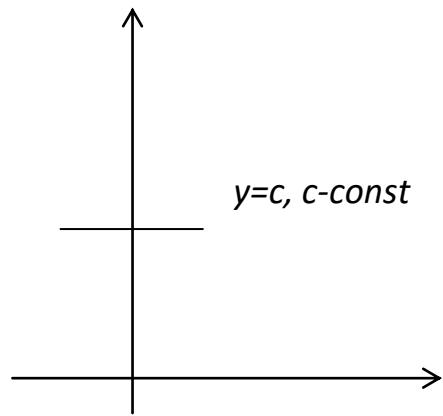
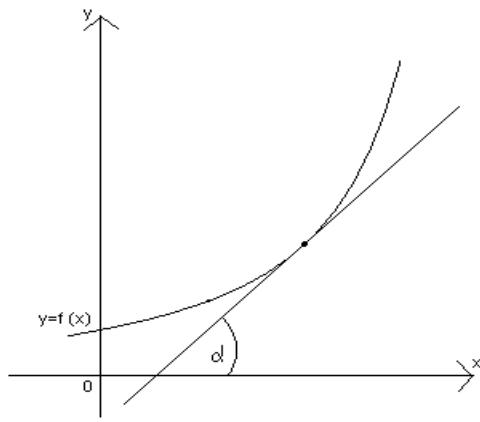
Теорема 1. Если дифференцируемая функция $y=f(x)$ возрастает (убывает) в данном интервале, то производная этой функции не отрицательна (не положительна) в этом интервале.

Обратное заключение также справедливо, оно выражается следующей теоремой.

Теорема 2. Если производная функции $y=f(x)$ отрицательна (положительна) на некотором интервале, то функция в этом интервале монотонно возрастает (монотонно убывает).



Таким образом



функция возрастает,

функция убывает,

функция постоянна

α -острый угол (I четв.), α -тупой угол (II четв.), $\alpha=0$,

$$\operatorname{tg} \alpha > 0, \quad \operatorname{tg} \alpha < 0, \quad \operatorname{tg} \alpha = 0,$$

$$f'(x) > 0. \quad f'(x) < 0. \quad f'(x) = 0.$$

Сформулируем правило нахождения интервалов монотонности функции $f(x)$.

1. Находим область определения функции $f(x)$.
2. Вычисляем производную $f'(x)$ данной функции.
3. Находим точки, в которых $f'(x)=0$ или не существует. Эти точки называются критическими для функции $f(x)$.
4. Делим область определения функции этими точками на интервалы.

Они являются интервалами монотонности.

5. Исследуем знак $f'(x)$ на каждом интервале. Если $f'(x)>0$, то на этом интервале $f(x)$ возрастает; если $f'(x)<0$, то на таком интервале функция $f(x)$ убывает.

Пример №1. Найти промежутки монотонности функции $y=2x^3-3x^2-36x+5$.

1. Область определения: \mathbb{R} . Функция непрерывна.

2. Вычисляем производную : $y'=6x^2-6x-36$.

3. Находим критические точки: $y'=0$.

$$x^2-x-6=0$$

$$D=1-4\cdot(-6)\cdot 1=1+24=25 \quad x_1=-2, \quad x_2=3$$

4. Делим область определения на интервалы:



5. Функция возрастает при $x \in (-\infty; -2] \cup [3; +\infty)$, функция убывает при $x \in [-2; 3]$.

Пример №2. Найти промежутки монотонности функции $y=x^3-3x^2$.

1. Область определения: \mathbb{R} . Функция непрерывна.

2. Вычисляем производную : $y'=3x^2-6x$.

3. Находим критические точки: $y'=0$.

$$x^2 - 2x = 0$$

$$x(x - 2) = 0$$

$$x_1=0 \text{ и } x_2=2$$

4. Делим область определения на интервалы:



5. Функция возрастает при $x \in (-\infty; 0] \cup [2; +\infty)$, функция убывает при $x \in [0; 2]$.

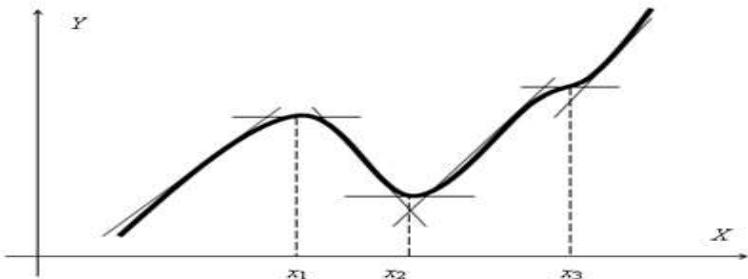
Но помимо монотонности функций с помощью первой производной можно ещё определить экстремумы функций (точки максимума/минимума).

Сначала введём необходимые определения и понятия.

Опр. 1. Точку $x=x_0$ называют точкой минимума функции $y=f(x)$, если у этой точки существует окрестность, для всех точек которой выполняется неравенство $f(x) \geq f(x_0)$.

Опр. 2. Точку $x=x_0$ называют точкой максимума функции $y=f(x)$, если у этой точки существует окрестность, для всех точек которой выполняется неравенство $f(x) \leq f(x_0)$.

Теорема 3. Если функция $y=f(x)$ имеет экстремум в точке $x=x_0$, то в этой точке производная функции или равна нулю, или не существует.



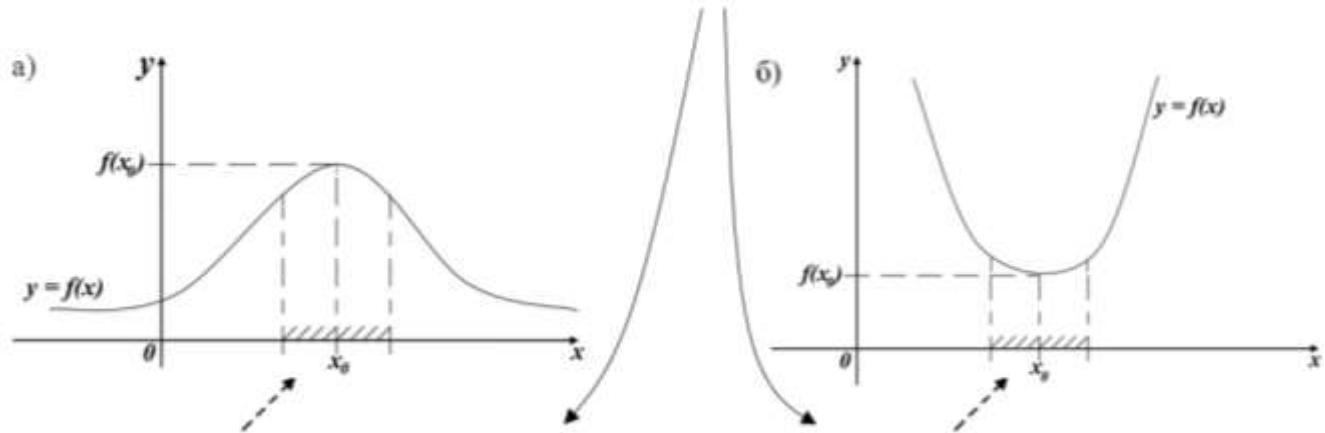
Рассмотрим ещё достаточный признак существования экстремумов функции.

Теорема 4. Если производная $f'(x)$ при переходе через точку x_0 меняет знак, то точка x_0 является точкой экстремума функции $f(x)$.

Если производная меняет знак с + на -, то точка будет являться точкой максимума,

если с - на +, то точка будет точкой минимума.

Точка экстремума



Точка максимума

для всех x , $f(x) \geq f(x_0)$

Точка минимума

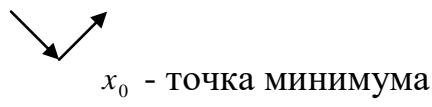
для всех x ,
 $f(x) \leq f(x_0)$

Теорема.

1. $f'(x)=0$, x_0 - критическая точка

слева от x_0 $f'(x) < 0$

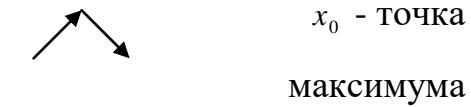
справа от x_0 $f'(x) > 0$



x_0 - точка минимума

слева от x_0 $f'(x) > 0$

справа от x_0 $f'(x) < 0$



x_0 - точка максимума

Рассмотрим теперь на примерах исследование функции на экстремумы.

Пример №3. Найти экстремумы функции $y = -2x^3 - 3x^2 + 12x - 4$.

1. Область определения: \mathbb{R} . Функция непрерывна.

2. Вычисляем производную: $y' = -6x^2 - 6x + 12$.

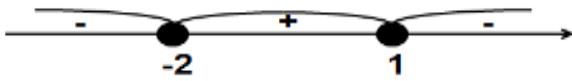
3. Находим критические точки: $y' = 0$.

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$D = 1 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 1 + 8 = 9$$

$$x_1 = -2 \text{ и } x_2 = 1$$

4. Делим область определения на интервалы:



5. Функция возрастает при $x \in (-\infty; 0] \cup [2; +\infty)$, функция убывает при $x \in [0; 2]$.

6. Видно, что в точке $x = -2$ знак производной меняется с минуса на плюс.

Поэтому критическая точка $x = -2$ – точка минимума. Найдём минимум функции $y_{min} = -24$. В точке $x = 1$ знак меняется с плюса на минус. Поэтому критическая точка $x = 1$ – точка максимума. Найдём максимум функции: $y_{max} = 3$.

Таким образом

Применение производной	Алгоритм
I. Нахождение интервалов монотонности функции $y = f(x)$	<ol style="list-style-type: none">Вычислить $f'(x)$ данной функции $f(x)$.Найти критические точки, для этого решить уравнение $f'(x) = 0$.Критическими точками разбить область определения на интервалы.На каждом из интервалов

	<p>определяем знак производной. Для этого берем произвольное число из рассматриваемого интервала и подставляем в производную функции. По знаку ответа определяем знак производной.</p> <p>5. По знаку производной делаем вывод о возрастании, убывании функции.</p>
I. Исследование функции на экстремум	<ol style="list-style-type: none"> 1. Найти производную функции $f'(x)$. 2. Решить уравнение $f'(x)=0$ и найти критические точки. 3. Критическими точками разбить область определения на интервалы. 4. Исследовать знак производной в некоторой окрестности каждой критической точки. 5. а) если при переходе через т. x_0 производная меняет знак с «+» на «-», x_0 - точка максимума; б) если при переходе через т. x_0 производная меняет знак с «-» на «+», то т. x_0 - точка минимума.

План исследования функции и построения ее графика.

1. Область определения.
2. Производная.
3. Критические точки.
4. Знаки производной, промежутки монотонности.
5. Экстремумы функции
6. График.

Контрольные вопросы:

1. Дайте определение возрастающей (убывающей) функции.
2. Назовите теоремы о возрастании (убывании) функции.
3. Что называется точкой минимума (максимума) функции.
4. Что называется критической точкой.
5. Достаточные условия экстремума функции.
6. Алгоритм исследования функции на монотонность и экстремумы.
7. Алгоритм исследования функции.

Литература.

1. Яковлев Г.Н. Алгебра и начала анализа. Часть 1. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 2006.
2. Яковлев Г.Н. Алгебра и начала анализа. Часть 2. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 2007.
3. Богомолов М.В. Практические занятия по математике. - М.: Высшая школа, 1993.