Уважаемые студенты!

- Прочтите приведенный ниже конспект лекции.
- Напишите конспект лекции в тетрадь объемом не менее 4-5 страниц рукописного текста.
- Решите письменно приведенные ниже примеры для самостоятельной работы.
- Фотоотчет конспекта лекции и выполненного домашнего задания предоставить на электронную почту hvastov@rambler.ru,
- При возникновении вопросов обращаться по телефону 0721098278 (WatsApp).

Лекция Нахождение неопределенного интеграла методом интегрирования по частям

План

1. Метод интегрирования по частям
2. Применение метода интегрирования по частям

1. Метод интегрирования по частям

Метод интегрирования по частям решает очень важную задачу, он позволяет интегрировать некоторые функции, отсутствующие в таблице, произведение функций, а в ряде случаев – и частное.

$\int udv = uv - \int vdu$ – формула интегрирования по частям собственной персоной.

По частям берутся интегралы следующих видов:

1) $\int \ln xdx$, $\int (x^2+3)\ln xdx$, $\int x\ln^2 xdx$ – логарифм, логарифм, умноженный на какой-нибудь многочлен.

2) $\int xe^x dx$, $\int (x^2-2x+5)e^{-2x}dx$ – экспоненциальная функция, умноженная на какой-нибудь многочлен. Сюда же можно отнести интегралы вроде $\int x\cdot 4^x dx$ – показательная функция, умноженная на многочлен.

3) $\int x\cos 6xdx$, $\int (x^2+3x)\sin 2xdx$, $\int xtg^2 xdx$ – тригонометрические функции, умноженные на какой-нибудь многочлен.

4) $\int \arcsin xdx$, $\int x^2 arctgxdx$ – обратные тригонометрические, умноженные на какой-нибудь многочлен.

2. Применение метода интегрирования по частям

<u>Пример 1</u>

Найти неопределенный интеграл.

$\int \ln xdx$

Решение:

$\int \ln xdx = (*)$

Используем формулу интегрирования по частям: $\int u dv = uv - \int v du$

Формула применяется слева направо

Смотрим на левую часть: $\int u dv$. Очевидно, что в нашем примере $\int \ln x dx$ (и во всех остальных, которые мы рассмотрим) что-то нужно обозначить за u, а что-то за dv.

В интегралах рассматриваемого типа за u всегда обозначается логарифм.

Технически оформление решения реализуется следующим образом, в столбик записываем:

$u = \ln x$

$dv = dx$

То есть, за u мы обозначили логарифм, а за dv – **оставшуюся часть** подынтегрального выражения.

Следующий этап: находим дифференциал du:

$u = \ln x \Rightarrow du = (\ln x)' dx = \frac{dx}{x}$

$dv = dx$

Дифференциал – это почти то же самое, что и производная.

Теперь находим функцию v. Для того чтобы найти функцию v необходимо проинтегрировать **правую часть** нижнего равенства $dv = dx$:

$u = \ln x \Rightarrow du = (\ln x)' dx = \frac{dx}{x}$

$dv = dx \Rightarrow v = \int dx = x$

Теперь открываем наше решение и конструируем правую часть формулы: $uv - \int v du$.

$\int \ln x dx = (*)$

Интегрируем по частям: $\int u dv = uv - \int v du$

$u = \ln x \Rightarrow du = (\ln x)' dx = \frac{dx}{x}$

$dv = dx \Rightarrow v = \int dx = x$

$(*) = x \ln x - \int x \cdot \frac{dx}{x} = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C$, *где* $C = const$

Единственный момент, в произведении uv я сразу переставил местами u и v, так как множитель x принято записывать перед логарифмом.

Обратите внимание, что в ряде случаев **сразу после** применения формулы, под оставшимся интегралом обязательно проводится упрощение.

Выполним проверку. Для этого нужно взять производную от ответа:

$$(x\ln x - x + C)' = (x\ln x)' - (x)' + (C)' = (x)'\ln x + x(\ln x)' - 1 + 0 =$$

$$= 1\cdot \ln x + x\cdot \frac{1}{x} - 1 = \ln x + 1 - 1 = \ln x$$

Получена исходная подынтегральная функция, значит, интеграл решён правильно.

В ходе проверки мы использовали правило дифференцирования произведения: $(uv)' = u'v + uv'$.

Формула интегрирования по частям $\int udv = uv - \int vdu$ **и формула** $(uv)' = u'v + uv'$ **– это два взаимно обратных правила.**

<u>Пример 2</u>

Найти неопределенный интеграл.

$$\int x\ln^2 xdx$$

Подынтегральная функция представляет собой произведение логарифма на многочлен.

Решаем.

$$\int x\ln^2 xdx = (*)$$

Как уже говорилось, за u необходимо обозначить логарифм (то, что он в степени – значения не имеет). За dv обозначаем **оставшуюся часть** подынтегрального выражения.

Записываем в столбик:

$$u = \ln^2 x$$

$$dv = xdx$$

Сначала находим дифференциал du:

$$u = \ln^2 x \Rightarrow du = (\ln^2 x)'dx = 2\ln x\cdot(\ln x)'dx = \frac{2\ln xdx}{x}$$

$$dv = xdx$$

Здесь использовано правило дифференцирования сложной функции $(u(v))' = u'(v)\cdot v'$.

Теперь находим функцию v, для этого интегрируем **правую часть** нижнего равенства $dv = xdx$:

$$u = \ln^2 x \Rightarrow du = (\ln^2 x)'dx = 2\ln x\cdot(\ln x)'dx = \frac{2\ln xdx}{x}$$

$$dv = xdx \Rightarrow v = \int xdx = \frac{x^2}{2}$$

Для интегрирования применяем простейшую табличную формулу $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

В соответствии с правой частью $uv - \int vdu$:

$$(*)=\frac{x^2\ln^2 x}{2}-\int\left(\frac{x^2}{2}\cdot\frac{2\ln x dx}{x}\right)=\frac{x^2\ln^2 x}{2}-\int x\ln x dx=(*)$$

Под интегралом многочлен на логарифм! Поэтому решение опять прерывается и правило интегрирования по частям применяется второй раз. Не забываем, что за u в похожих ситуациях всегда обозначается логарифм.

$$u=\ln x\Rightarrow du=\frac{dx}{x}$$

$$dv=xdx\Rightarrow v=\frac{x^2}{2}$$

$$\int udv=uv-\int vdu$$

$$(*)\overset{(1)}{=}\frac{x^2\ln^2 x}{2}-\left(\frac{x^2\ln x}{2}-\int\left(\frac{x^2}{2}\cdot\frac{dx}{x}\right)\right)\overset{(2)}{=}\frac{x^2\ln^2 x}{2}-\frac{x^2\ln x}{2}+\frac{1}{2}\int xdx\overset{(3)}{=}$$

$$=\frac{x^2\ln^2 x}{2}-\frac{x^2\ln x}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}+C\overset{(4)}{=}\frac{x^2(2\ln^2 x-2\ln x+1)}{4}+C,\ C=const$$

Обратите внимание, что минус относится **ко всей** скобке $\left(\frac{x^2\ln x}{2}-\int\left(\frac{x^2}{2}\cdot\frac{dx}{x}\right)\right)$, и эти скобки нужно корректно раскрыть.

Раскрываем скобки. Последний интеграл упрощаем.

Берем последний интеграл.

Приводим ответ.

Необходимость дважды (а то и трижды) применять правило интегрирования по частям возникает не так уж и редко.

Примеры для самостоятельного решения:

Пример 1

Найти неопределенный интеграл.

$$\int\frac{\ln x dx}{x}$$

Этот пример решается методом замены переменной (или подведением под знак дифференциала).

Пример 2

Найти неопределенный интеграл.

$$\int\frac{\ln x dx}{x^2}$$

Этот интеграл интегрируется по частям (обещанная дробь).

Контрольные вопросы:

1. Что называется дифференциалом функции?
2. Как найти дифференциал функции?
3. Когда применяется метод интегрирования по частям?
4. Приведите формулу интегрирования по частям.