Задание:

- ***Изучить теорию;***
- ***Написать краткий конспект;***
- ***По вопросам обращаться 072-1098278 или xvsviv@rambler.ru***
- ***Фотоотчѐт конспекта прислать в течении 3 дней со дня получения задания на xvsviv@rambler.ru***

ЛЕКЦИЯ ПОНЯТИЕ ПРЕДИКАТ. ЛОГИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ НАД ПРЕДИКАТАМИ

План

1. Понятие предикат.
2. Логические операции над предикатами.

1. Понятие предикат.

При анализе рассуждений в логике высказываний нас не интересовала внутренняя структура самих высказываний. И это обстоятельство не позволяет анализировать большое количество рассуждений.

Например:

Через две данных точки проходит единственная прямая.

Точка лежит между двумя точками.

x>5.

Эти предложения не являются высказываниями, но становятся таковыми, если *предметным переменным,* входящим в эти предложения, задать конкретны значения. Так в последнем примере при x = 3 получим ложное высказывание, а при x = 8 истинное высказывание. Значения предметных переменных берутся из некоторого предметного множества А (точек, углов, прямых, чисел, ромбов и т.д.).

Введем понятие предиката.

Под ***предикатом предметной переменной x*** $\in$ ***A*** будем понимать функцию P(x) на {0,1}. Предикат p (x) называется ***одноместным предикатом***

Например:

Предикат x > 5, x$\in$ R: при x = 4 предикат обращается в ложное высказывание. При x = 7 предикат обращается в истинное высказывание.

Функция P (x, y), где x, y $\in$A, принимающая значения во множестве {0,1} называется ***двухместным предикатом***.

Например: x<y

Пусть У = 5, получим x < 5 – одноместный предикат. Если положить x = 4, то 4 < 5 – нульместные предикаты (высказывания).

Местность предиката - количество предметных переменных. Задание конкретного значения предметным переменным понижает местность предиката. Одноместные предикаты выражают свойство быть чем-то.

Например:

Свойство быть точкой. x – точка. Введем обозначение этого предиката: T (x). Тогда T (A) читается как A-точка.

Двухместные предикаты и предикаты более высокой местности выражают отношения между объектами.

Например: Двухместный предикат принадлежности – $x \in y$.

Если x – точка, а y – прямая, то читаем: точка x принадлежит прямой y.

Выбор предикатного символа остается за пользователем. Так, вместо $x \in y$ можно ввести предикат P (x, y), оговорив, что P (,) – это предикат принадлежности (запятая в скобках свидетельствует о том, что предикат двухместный). Разумеется, что нельзя использовать одно и тоже обозначение для разных предикатов. Широко используются известные из математики обозначения предикатов $\approx, \neq, \equiv, \leq, \geq, \perp, \parallel, =$

Область истинности.

Пусть на множестве U задан предикат P (x). Задавая x различные значения, мы будем получать высказывания, часть из которых истинна, а часть возможно ложна. Множество $M_{\partial}(x)$ значений x, при которых предикат P - истина, называется ***областью истинности***.

2. Логические операции над предикатами.

Операции над предикатами.

Над предикатами выполняются те же операции, что и над высказываниями.

1) ***Отрицание.*** $\overline{Đ(\tilde{o})}$ - предикат, множеством истинности которого является множество, для которого предикат P – ложный.

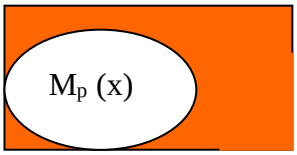

Рис. 1. Область истинности отрицания предиката

2) ***Конъюнкция*** P (x) $\wedge$ Q(x) – это предикат, область истинности которого равна $M_{\partial} \cap M_q$.

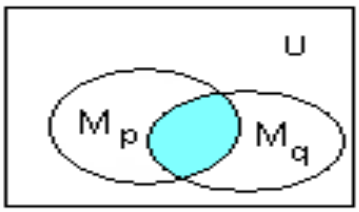

Рис. 2. Область истинности конъюнкция предикатов

3) ***Дизъюнкция*** P (x) $\vee$ Q(x) – предикат, область истинности которого равна $M_{\partial} \cup M_q$.

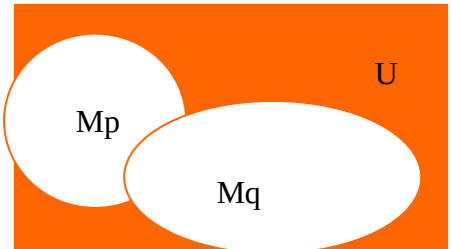

Рис. 3. Область истинности дизъюнкции предикатов

4) ***Импликация*** P (x)$\rightarrow$ Q(x) – предикат, у которого область истинности совпадает с дополнением разности M_{∂} и M_q, т.е. равна ($\overline{\grave{I}_{\partial} \setminus M_q}$).

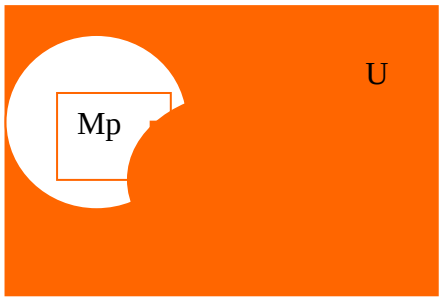

Рис. 3. Область истинности импликаци предикатов

5) ***Эквиваленция*** P (x) $\Leftrightarrow$Q(x) – предикат, область истинности которого совпадает с объединением пересечения M_{∂} с M_{∂}и дополнения к их объединению, т.е. равна - $M_{\partial} \cap M_q \cup \overline{\grave{I}_{\partial} \cup M_q}$.

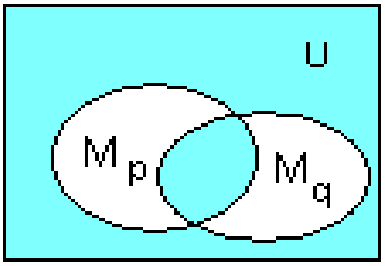

Рис. 4. Область истинности эквиваленции предикатов

Кванторы.

Рассмотрим предложения:

В любой треугольник можно вписать окружность.

Всякое число, оканчивающееся на четную цифру, делится на 2.

В этих предложениях встречаются слова «любой», «всякое». Эти слова заменяют специальным символом. Значок $\forall$ называется ***квантором всеобщности.***

$\forall$ - ***всякий, любой, каждый.***

($\forall$x) P (x), где x $\in$ U – запись, говорящая о том, что любой x из предметной области U обладает свойством P.

Например. Пусть P (x) предикат, выражающий для x $\in$ N свойство быть простым числом. Тогда ($\forall$x) (x $\in$ N) P (x) - ложное высказывание «любое натуральное число является простым».

Наряду с квантором всеобщности в логике предикатов рассматривается ***квантор существования***: Его значок $\exists$.

$(\exists x)$ P (x) – существует такой x, который обладает свойством P.

Например. Пусть P (x) предикат, выражающий для $x \in N$ свойство быть простым числом. Тогда, $(\exists x)$ $(x \in N)$ P (x) - истинное высказывание «существует натуральное число, которое является простым».

Операция введения квантора называется ***операцией навешивания квантора***. Навешивание квантора по какой-нибудь переменной понижает местность предиката.

Переменная, по которой навешен квантор, называется ***связанной***.

Например. $x<y$ - двухместный предикат. Навесим квантор:

$(\exists x)$ $(x \in N)$ $(x<y)$ предикат одноместный по переменной y.

Таким образом, понизить местность предиката можно двумя способами.

1. задать предметной переменной конкретное значение.
2. навесить кванторы по одной или нескольким переменным.

Квантор всеобщности можно рассматривать как обобщение конъюнкции для конечных и бесконечных множеств.

Квантор существования можно рассматривать как обобщение дизъюнкции для конечных и бесконечных множеств.

Операции с кванторами.

Пусть имеется предикат $x<y$, где x, y $\in R$. Рассмотрим всевозможные варианты навешивания кванторов по каждой из переменных.

1) $(\forall x)(\forall y)(x < y)$ – для любого x и любого y имеем $x < y$ - ложно.
2) $(\forall y)(\forall x)(x < y)$ – для любого y и любого x имеем $x < y$ - ложно.
3) $(\forall x)(\exists y)(x < y)$ – для любого x существует y такой, что $x < y$, т.е. наибольшего числа нет - истинно.
4) $(\exists y)(\forall x)(x < y)$ – существует y для любого x, что $x < y$, т.е. есть наибольшее число. - ложно.
5) $(\exists y)(\exists x)(x < y)$ – существует x и существует y, что $x < y$ - истинно.
6) $(\exists x)(\exists y)(x < y)$ – существует y и существует x, что $x < y$ истинно.
7) $(\exists x)(\forall y)(x < y)$ – существует x для любого y, что $x < y$, т.е. есть наименьшее число - ложно.
8) $(\forall y)(\exists x)(x < y)$ – для любого y существует x, что $x < y$, т.е. наименьшего числа нет - истинно.

Таким образом, видим, что одноименные кванторы можно менять местами, не изменяя значения предиката. Изменение порядка разноименных кванторов приводит к изменению истиностного значения предиката. Запись математических предложений с помощью предикатов.

Для того чтобы выразить некоторое предложение в виде предикатов, необходимо

- установить предметную область, к которой относятся предметные переменные,
- выделить объекты, ввести соответственные обозначения, если таковых нет в математике
- записать предложение в этих обозначениях.

Пример. Предложение: прямая a параллельна прямой b.

Предметная область – множество прямых.

Введем предикат P (x), x – прямая. Предикат параллельности x||y

Тогда предложение можно записать в виде: $P(a) \wedge P(b) \wedge (a \| b)$.

Пример. Аксиома: через две различные точки проходит единственная прямая. (Ели две точки принадлежат двум прямым, то эти прямые совпадают).

Введем предикаты

T (x), x – точка; P (x), x – прямая; J(x,y) - $x \in y$. Тогда можно записать:

$T(A) \wedge T(B) \wedge (A \neq B) \wedge P(a) \wedge P(b) \wedge J(A,a) \wedge J(B,a) \wedge J(A,b) \wedge J(B,b) \rightarrow (a=b)$.

Наряду с квантором существования рассматривается ***ограниченный квантор существования.***

$\exists!$ – означает существование единственного элемента.

Запишем теперь эту аксиому, используя ограниченный квантор существования:

$\forall (A, B) (T(A) \wedge T(B) \wedge \overline{\grave{A}=\hat{A}} \rightarrow (\exists!(a)) P(a) \wedge J(A,a) \wedge J(B,b))$.

Контрольные вопросы:

1. Дайте определение предиката. Чем отличается одноместный, двуместный и много местный предикат?
2. Какие операции можно выполнять с предикатами. Охарактеризуйте каждую операцию, изобразите с помощью диаграмм Венна.
3. Какие существуют кванторы, как они записываются? Приведите пример на каждый квантор.