Уважаемые студенты!
Вам необходимо изучить материал лекции, законспектировать материал лекции и ответить на контрольные вопросы.

Электронная почта: hvastov@rambler.ru

Лекция

Применение основных тригонометрических формул к преобразованию выражений.

План:

1. Формулы сложения.
2. Формулы двойного аргумента.
3. Формулы половинного аргумента.
4. Формулы преобразования суммы тригонометрических функций в произведение.
5. Формулы преобразования произведения функций в сумму.
6. Формулы приведения.
7. Решение примеров.

1. Формулы сложения:

1. $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$
2. $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$
3. $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$
4. $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$
5. $tg(\alpha+\beta)=\dfrac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha tg\beta}$
6. $tg(\alpha-\beta)=\dfrac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha tg\beta}$

2. Формулы двойного угла:

1. $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$
2. $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$; $\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1$; $\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$
3. $tg 2\alpha=\dfrac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$
4. $ctg 2\alpha=\dfrac{ctg^2\alpha-1}{2ctg\alpha}$.

3. Формулы половинного угла:

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \qquad \cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} \qquad tg\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

4. Формулы преобразования суммы в произведение:

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};\qquad \sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2};$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};\qquad \cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$tg\alpha+tg\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta};\quad tg\alpha-tg\beta=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta};\qquad ctg\alpha+ctg\beta=\frac{\sin(\beta+\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta};$$

$$ctg\alpha-ctg\beta=\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}.$$

5. Формулы преобразования произведения в сумму:

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right);\qquad \cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right);$$

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right);\qquad ctg\alpha\cdot tg\beta=\frac{ctg\alpha+tg\beta}{tg\alpha+ctg\beta}=-\frac{ctg\alpha-tg\beta}{tg\alpha-ctg\beta};$$

$$tg\alpha\cdot tg\beta=\frac{tg\alpha+tg\beta}{ctg\alpha+ctg\beta}=-\frac{tg\alpha-tg\beta}{ctg\alpha-ctg\beta};\qquad ctg\alpha\cdot ctg\beta=\frac{ctg\alpha+ctg\beta}{tg\alpha+tg\beta}=-\frac{ctg\alpha-ctg\beta}{tg\alpha-tg\beta}.$$

6. Формулы приведения:

Если в формуле аргумент функции имеет вид: $\alpha;\frac{\pi}{2}\pm\alpha;\pi\pm\alpha;\frac{3\pi}{2}\pm\alpha;2\pi\pm\alpha$, то данные формулы называются формулами приведения.

При составлении формул приведения, необходимо пользоваться следующими правилами:

1. Знак функции, стоящей в правой части равенства, определяется по знаку функции, стоящей в левой части равенства.
2. Если аргумент функции имеет вид: $\pi\pm\alpha;2\pi\pm\alpha$, то название функции не меняется. Если же аргумент функции имеет вид: $\frac{3\pi}{2}\pm\alpha;\frac{\pi}{2}\pm\alpha$, то название функции меняется на сходное: $\sin$ на $\cos$, tg на ctg и наоборот.

Например:

$$\sin(180^\circ+\alpha)=-\sin\alpha\qquad \sin(270^\circ-\alpha)=-\cos\alpha$$

$$\cos(90^\circ+\alpha)=-\sin\alpha\qquad \cos(360^\circ-\alpha)=\cos\alpha$$

$$tg(180^\circ-\alpha)=-tg\,\alpha\qquad ctg(90^\circ+\alpha)=-tg\,\alpha$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right)=\cos\alpha;\qquad \cos\left(\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right)=\mp\sin\alpha;\qquad tg\left(\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right)=\mp ctg\alpha;$$

$$\sin(\pi\pm\alpha)=\mp\sin\alpha;\qquad \cos(\pi\pm\alpha)=-\cos\alpha;\qquad tg(\pi\pm\alpha)=\pm tg\alpha;$$

$$\sin\left(\frac{3}{2}\pi\pm\alpha\right)=-\cos\alpha;\qquad \cos\left(\frac{3}{2}\pi\pm\alpha\right)=\pm\sin\alpha;\qquad tg\left(\frac{3}{2}\pi\pm\alpha\right)=\mp ctg\alpha;$$

$$\sin(2\pi\pm\alpha)=\pm\sin\alpha;\qquad \cos(2\pi\pm\alpha)=\cos\alpha;\qquad tg(2\pi\pm\alpha)=\pm tg\alpha.$$

7. Решение примеров.

Тригонометрические функции имеют широкое применение.

Во-первых, они помогают решать геометрические задачи – рассчитывать треугольники и более сложные фигуры. Кроме того, их можно использовать и в быту, например чтобы понять, пролезет ли кровать в дверной проем или нет (до того, как совершить покупку). Или для того, чтобы оценить высоту дома или дерева, ширину реки.

Но чаще тригонометрические функции применяют для решения технических задач: построения чертежей деталей, зданий, расчета нагрузок на составные части механизма, просчета траектории движения и прочее.

Это основные сферы применения тригонометрических функций. Те же, кто собрался посвятить свою жизнь технической профессии, увидят и другие применения этого математического инструмента.

Вы уже знаете различные соотношения для тригонометрических функций, с помощью которых можно вычислить их значения и упростить выражение, которое содержит такие функции. На этом уроке мы займемся отработкой навыков упрощения и вычисления.

Прежде чем начать, вспомним, что для углов существуют две основные единицы измерения: градусы и радианы. Все вычисления вы должны уметь делать как в одних, так и в других единицах измерения. Основное соотношение: $180^\circ = \pi$ радиан. Соответственно, в два раза больший угол: $360^\circ = 2\pi$ радиан; а в два раза меньший – $90^\circ = \frac{\pi}{2}$ радиан. Эти соотношения желательно держать в голове, остальные углы можно перевести из градусов в радианы с помощью пропорции:

$$\alpha = \frac{\alpha^\circ}{180^\circ} \cdot \pi$$

Задание 1.

Известно, что:

$$\cos\alpha = \frac{1}{3}$$

Определить значения синуса, тангенса и котангенса α, если $360^\circ < \alpha < 540^\circ$.

Решение

Зная значение одной тригонометрической функции, всегда можно найти значение всех остальных с точностью до знака. Для этого понадобится основное тригонометрическое тождество:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

А также определения тангенса и котангенса для произвольного угла:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

Используем эти инструменты. Подставим значение косинуса в основное тригонометрическое тождество:

$$\sin^2\alpha + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1$$

Упростив, получим:

$$\sin^2\alpha = 1 - \frac{1}{9}$$

$$\sin^2\alpha = \frac{8}{9}$$

Тогда:

$$\sin\alpha = \pm\sqrt{\frac{8}{9}} = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Мы получили два возможных значения синуса: положительное и отрицательное. Зная дополнительную информацию $360° < \alpha < 540°$, мы можем однозначно выбрать знак. Отмечаем на окружности точки, соответствующие углам $360°$ и $540°$. Угол α находится между ними, т. е. ему соответствуют точки верхней полуокружности (см. рис. 1).

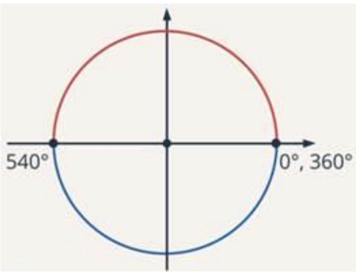

Рис. 1. Иллюстрация к заданию 1

Ординаты всех этих точек положительны, значит, и $\sin\alpha > 0$. Еще говорят так: «угол α лежит в первой или второй четверти. В этих четвертях синус положительный»:

$$\sin\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Осталось найти тангенс и котангенс по определению:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{2\sqrt{2}}{3} : \frac{1}{3} = 2\sqrt{2}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{3} : \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

Ответ: $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$; $\operatorname{tg}\alpha = 2\sqrt{2}$; $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

Задание 2. Найти значение выражения:

$$-4\sqrt{3}\sin(-780^\circ)$$

Решение

Идея решения подобных заданий следующая: преобразовать выражение так, чтобы получить острый угол. А затем найти значение функции по таблице:

Градусы	0°	30°	45°	60°	90°
Радианы	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

В задании угол отрицательный (-780°), поэтому начинаем с формул для $-\alpha$:

$$-4\sqrt{3}\sin(-780^\circ) = -4\sqrt{3}\cdot(-\sin 780^\circ) = 4\sqrt{3}\sin 780^\circ$$

Теперь убираем из аргумента периоды (добавление и вычитание целого числа периодов не меняет значение функции):

$$4\sqrt{3}\sin 780^\circ = 4\sqrt{3}\sin(420^\circ + 360^\circ) = 4\sqrt{3}\sin 420^\circ = 4\sqrt{3}\sin(60^\circ + 360^\circ) = 4\sqrt{3}\sin 60^\circ$$

По таблице находим:

$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Подставляем в выражение:

$$4\sqrt{3}\sin 60^\circ = 4\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3} = 6$$

Ответ: 6.

Отметим, что период 360° (или 2π) для синусов и косинусов мы можем выделять не один раз. Поэтому для больших значений угла удобно его сразу представить в виде $\alpha = 360^\circ\cdot n + x$ (или $\alpha = 2\pi\cdot n + x$ в радианах), где n – некоторое целое число. А для этого следует разделить с остатком значение угла на 360°.

Например, найдем $\cos 4050^\circ$. Делим с остатком 4050 на 360:

$$4050^\circ = 360^\circ\cdot 11 + 90^\circ$$

Получаем:

$$\cos 4050^\circ = \cos(360^\circ\cdot 11 + 90^\circ) = \cos 90^\circ = 0$$

У тангенсов и котангенсов период равен 180° (или π). Соответственно, угол представляем в виде $\alpha = 180^\circ\cdot n + x$ (или $\alpha = \pi\cdot n + x$ в радианах).

Например, вычислим $\mathrm{tg}\frac{13\pi}{3}$:

$$\mathrm{tg}\frac{13\pi}{3} = \mathrm{tg}\,4\frac{1}{3}\pi = \mathrm{tg}\left(4\pi + \frac{1}{3}\pi\right) = \mathrm{tg}\,\frac{1}{3}\pi = \mathrm{tg}\,\frac{\pi}{3}$$

Для этого угла можем уже воспользоваться таблицей:

$$\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

Упрощение выражений. Формулы приведения

Если в задании с тригонометрическими функциями вам встретились тангенс или котангенс, то лучше сразу расписать их по определению. Это сведет вашу задачу к работе только с синусами и косинусами.

Задание 3. Найти значение выражения:

$$\frac{2\cos\alpha - 4\sin\alpha}{2\sin\alpha + 5\cos\alpha},$$

если $\mathrm{tg}\,\alpha = 1{,}25$.

Решение

По определению:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

То есть:

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 1{,}25$$

Теперь остались только синусы и косинусы. Из полученного соотношения выразим синус:

$$\sin\alpha = 1{,}25\cos\alpha$$

Теперь подставим это в искомое выражение:

$$\frac{2\cos\alpha - 4\sin\alpha}{2\sin\alpha + 5\cos\alpha} = \frac{2\cos\alpha - 4\cdot 1{,}25\cos\alpha}{2\cdot 1{,}25\cos\alpha + 5\cos\alpha} =$$

Осталось упростить выражение и получить ответ:

$$= \frac{2\cos\alpha - 5\cos\alpha}{2{,}5\cos\alpha + 5\cos\alpha} = \frac{-3\cos\alpha}{7{,}5\cos\alpha} = \frac{-3}{7{,}5} = -0{,}4$$

Ответ: $-0{,}4$.

Задание 4. Упростить выражение:

$$\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2 x} + \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}$$

Решение

Видим тангенс и котангенс – выражаем их через синус и косинус:

$$\frac{1}{1+\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}} + \frac{1}{1+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}$$

Получились многоэтажные дроби. Лучше избавиться от них, заменив черту дроби знаком деления:

$$1:\left(1+\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\right) + 1:\left(1+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\right)$$

Теперь вспоминаем принципы работы с дробями. Сначала приводим к общему знаменателю:

$$1:\left(\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x}\right) + 1:\left(\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}\right)$$

Можно продолжить выполнять операции с дробями. А можно отметить, что в числителях дробей мы видим формулу основного тригонометрического тождества. Можем заменить $\sin^2 x + \cos^2 x$ на 1 – это существенно упростит наше выражение:

$$1:\frac{1}{\sin^2 x} + 1:\frac{1}{\cos^2 x}$$

Выполняем деление:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

Ответ: 1.

Кроме основного тригонометрического тождества и определений тангенса и котангенса, вы знаете еще множество формул для работы с тригонометрическими функциями. С их помощью также можно упрощать выражения. Главное – понять, какую формулу нужно использовать. Чем больше практики будет, тем легче вам будет выбрать нужную формулу. Но поначалу не страшно, если выбранный способ решения окажется длинным или не приведет к нужному результату. Тогда нужно вернуться и попробовать использовать другую формулу.

Задание 5. Упростить выражение:

$$\frac{3\sin(\alpha - 9\pi) + \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)}{\sin(\pi - \alpha)}$$

Решение

Упростим каждую из функций по отдельности.

1) $\sin(\alpha - 9\pi)$. Для начала выделим период 2π. Его можно выделить 4 раза:

$$9\pi = 2\pi \cdot 4 + \pi$$

Тогда:

$$\sin(\alpha - 9\pi) = \sin\left(\alpha - (2\pi \cdot 4 + \pi)\right) = \sin(\alpha - 2\pi \cdot 4 - \pi) = \sin(\alpha - \pi)$$

У нас есть формула для $\sin(\alpha + \pi)$, а тут $-\pi$. Что делать? Прибавим период; значение функции при этом не изменится:

$$\sin(\alpha - \pi) = \sin(\alpha - \pi + 2\pi) = \sin(\alpha + \pi)$$

Теперь уже можно использовать формулу приведения:

$$\sin(\alpha+\pi) = -\sin\alpha$$

2) $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)$. У нас есть формула для $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$. В ней вычитается угол, а в нашем выражении – сложение. Поэтому, чтобы использовать эту формулу, превратим сложение в вычитание:

$$\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-(-\alpha)\right)$$

Формулы приведения справедливы для любых углов. Поэтому можем применить ее и для угла $-\alpha$. Получим:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-(-\alpha)\right) = \sin(-\alpha)$$

Использовав еще одну формулу приведения, получим:

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$

3) $\sin(\pi-\alpha)$. Перепишем это как $\sin(-\alpha+\pi)$. К углу $-\alpha$ прибавляется π, можем использовать соответствующую формулу приведения:

$$\sin(-\alpha+\pi) = -\sin(-\alpha)$$

Используя еще одну формулу приведения, получим:

$$-\sin(-\alpha) = -(-\sin\alpha) = \sin\alpha$$

Подставим упрощенные выражения в исходное:

$$\frac{3\sin(\alpha-9\pi)+\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)}{\sin(\pi-\alpha)} = \frac{-3\sin\alpha-\sin\alpha}{\sin\alpha} = \frac{-4\sin\alpha}{\sin\alpha} = -4$$

Ответ: -4.

Задание 6. Вычислить:

$$\operatorname{tg}13^\circ\cdot\operatorname{tg}103^\circ$$

Решение

В таблице мы не найдем точного значения $\operatorname{tg}13^\circ$. Конечно, можно вычислить приближенное значение с помощью калькулятора:

$$\operatorname{tg}13^\circ \approx 0{,}231$$

Аналогично можно поступить с другим тангенсом и вычислить ответ:

$$\operatorname{tg} 103^\circ \approx -4{,}331$$

$$\operatorname{tg} 13^\circ \cdot \operatorname{tg} 103^\circ \approx 0{,}231 \cdot (-4{,}331) = -1{,}000461$$

Но это лишь приближенное значение. Можно ли найти точное? Обратим внимание, что углы отличаются на 90°. Это дает подсказку, что здесь можно использовать формулы приведения:

$$\operatorname{tg} 103^\circ = \operatorname{tg}(90^\circ + 13^\circ)$$

В формуле приведения из 90° вычитается альфа, а тут – прибавляется. Как и в предыдущем примере, сделаем из сложения вычитание:

$$\operatorname{tg}\big(90^\circ - (-13^\circ)\big) = \operatorname{ctg}(-13^\circ)$$

Распишем котангенс по определению, чтобы получить для него формулу приведения:

$$\operatorname{ctg}(-13^\circ) = \frac{\cos(-13^\circ)}{\sin(-13^\circ)} = \frac{\cos 13^\circ}{-\sin 13^\circ} = -\operatorname{ctg} 13^\circ$$

Тогда:

$$\operatorname{tg} 13^\circ \cdot \operatorname{tg} 103^\circ = \operatorname{tg} 13^\circ \cdot (-\operatorname{ctg} 13^\circ) = -1$$

И это уже будет точный, а не приближенный ответ.

Ответ: -1.

Формулы двойного и половинного аргумента

Задание 7. Найти $\operatorname{tg}^2 3\alpha$, если $\cos 6\alpha = 0{,}2$.

Решение

Можно использовать формулы половинного аргумента. Тогда $\sin^2 3\alpha$ и $\cos^2 3\alpha$ можно сразу выразить:

$$\sin^2 3\alpha = \frac{1 - \cos 6\alpha}{2} = \frac{1 - 0{,}2}{2} = 0{,}4$$

$$\cos^2 3\alpha = \frac{1 + \cos 6\alpha}{2} = \frac{1 + 0{,}2}{2} = 0{,}6$$

$$\operatorname{tg}^2 3\alpha = \frac{\sin^2 3\alpha}{\cos^2 3\alpha} = \frac{0{,}4}{0{,}6} = \frac{2}{3}$$

Ответ: $\frac{2}{3}$.

Задание 8. Найти значение выражения:

$$3\sin\frac{11\pi}{12}\cdot\cos\frac{11\pi}{12}$$

Решение

Видим произведение косинуса и синуса одного аргумента. Это показатель того, что нужно применить формулу синуса двойного угла. Не хватает двойки перед выражением. Поэтому умножим и разделим выражение на 2:

$$3\sin\frac{11\pi}{12}\cdot\cos\frac{11\pi}{12}=\frac{3}{2}\cdot 2\sin\frac{11\pi}{12}\cdot\cos\frac{11\pi}{12}=$$

Теперь можем применить формулу:

$$=\frac{3}{2}\cdot\sin\left(2\cdot\frac{11\pi}{12}\right)=\frac{3}{2}\cdot\sin\frac{11\pi}{6}$$

Далее нужно применить формулы приведения. Можете самостоятельно потренироваться это делать. В итоге вы должны получить ответ $-0{,}75$. Если ответ не совпал, смотрите решение ниже.

Ответ: $-0{,}75$.

Тригонометрические функции суммы и разности

Задание 9. Упростить выражение:

$$\frac{\cos x\cdot\cos y-\cos(x+y)}{\cos(x-y)-\sin x\cdot\sin y}$$

Решение.

Применяем формулы косинуса суммы и разности:

$$\frac{\cos x\cdot\cos y-\cos(x+y)}{\cos(x-y)-\sin x\cdot\sin y}=\frac{\cos x\cdot\cos y-(\cos x\cdot\cos y-\sin x\cdot\sin y)}{\cos x\cdot\cos y-\sin x\cdot\sin y-\sin x\cdot\sin y}=\frac{\sin x\cdot\sin y}{\cos x\cdot\cos y}$$
$$=\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}y$$

Ответ: $\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}y$.

У формулы синуса суммы есть еще один, совсем не очевидный способ применения.

Задание 10. Упростить выражение:

$\sqrt{3}\cos x + \sin x$

Решение.

Казалось бы: куда же еще упрощать, тут всего 4 операции для вычисления? Но это можно сделать. Вынесем за скобку число 2. Да, в выражении его нет. Но это не мешает нам каждое слагаемое умножить и поделить на 2:

$$\sqrt{3}\cos x + \sin x = \frac{2\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{2}{2}\sin x = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x\right)$$

Пока не проще. Но подождите: $\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\frac{1}{2}$ – это значения косинусов и синусов из таблицы. Например:

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\frac{\pi}{3}$$

$$\frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$$

Тогда наше выражение равно:

$$2\left(\sin\frac{\pi}{3}\cdot\cos x + \cos\frac{\pi}{3}\cdot\sin x\right)$$

В скобках мы видим синус суммы. Получаем ответ:

$$2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$$

Ответ: $2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.

Преобразования суммы тригонометрических функций в произведение и наоборот

Задание 11. Упростить выражение:

$$\frac{\cos 5a + \cos 6a + \cos 7a}{\sin 5a + \sin 6a + \sin 7a}$$

Решение.

Упростить дробь – значит ее сократить. Для сокращения дроби нужно разложить числитель и знаменатель на множители. То есть нужно преобразовать сумму в произведение. Тут у нас по 3 слагаемых, какие же складывать? Возможны различные варианты, но начинать всегда лучше с симметричных. То есть со сложения $\cos 5\alpha$ и и аналогичных синусов: $\cos 7\alpha$

$$\cos 5\alpha + \cos 7\alpha = 2\cos\frac{5\alpha+7\alpha}{2}\cdot\cos\frac{5\alpha-7\alpha}{2} = 2\cos 6\alpha\cdot\cos(-\alpha) = 2\cos 6\alpha\cdot\cos\alpha$$

$$\sin 5\alpha + \sin 7\alpha = 2\sin\frac{5\alpha+7\alpha}{2}\cdot\cos\frac{5\alpha-7\alpha}{2} = 2\sin 6\alpha\cdot\cos(-\alpha) = 2\sin 6\alpha\cdot\cos\alpha$$

Подставим в исходное выражение:

$$\frac{2\cos 6\alpha\cdot\cos\alpha + \cos 6\alpha}{2\sin 6\alpha\cdot\cos\alpha + \sin 6\alpha} =$$

Теперь тут есть общие множители, которые можно вынести за скобки:

$$= \frac{\cos 6\alpha\,(2\cos\alpha + 1)}{\sin 6\alpha\,(2\cos\alpha + 1)} = \frac{\cos 6\alpha}{\sin 6\alpha} = \operatorname{ctg} 6\alpha$$

Ответ: $\operatorname{ctg} 6\alpha$.

Задание 12. Доказать тождество:

$$2\cos 3x\cdot\cos x - \cos 2x = \cos 4x$$

Решение.

Для доказательства упростим левую часть равенства и покажем, что она всегда равна правой. Здесь по порядку действия стоит сначала умножение, затем – сложение. Поэтому сначала можем преобразовать только произведение в сумму:

$$2\cos 3x\cdot\cos x = \cos(3x + x) + \cos(3x - x) = \cos 4x + \cos 2x$$

Подставив в левую часть равенства, получим:

$$2\cos 3x\cdot\cos x - \cos 2x = \cos 4x + \cos 2x - \cos 2x = \cos 4x$$

Видим, что после упрощения левая часть равенства тождественно равна правой.

Доказано.

Выбрать ответ.

1. Упростить выражение 7 $\cos^2\alpha + 7\sin^2\alpha$ - 5.

а) 1+$\cos^2\alpha$; б) 2; в) –12; г) 12

2. Упростить выражение $5 - 4\sin^2\alpha - 4\cos^2\alpha$

а) 1; б) 9; в) $1+8\sin^2\alpha$; г) $1+\cos^2\alpha$.

3. Упростить выражение $\frac{1-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} - tg^2\alpha$.

а) $ctg^2\alpha$; б) 0; в) $ctg^2\alpha - tg^2\alpha$; г) $2tg^2\alpha$

4. Упростить выражение $1 - \sin\alpha ctg\alpha \cos\alpha$

а) 0; б) $\sin^2\alpha$ в) $3\cos^2\alpha$ г) $1 - \sin 2\alpha$

5. Упростить выражение $\cos^4 x + \sin^2 x \cdot \cos^2 x$

а) $\cos 2x$; б) $2\sin^2 x$; в) $\cos^2 x$; г) $\cos^4 x$

Контрольные вопросы:

1) Запишите формулы тригонометрических функций суммы и разности двух углов.
2) Как записываются формулы двойного аргумента?
3) Как записываются формулы половинного аргумента?
4) Запишите формулы преобразования суммы в произведение.
5) Запишите формулы преобразования произведения в сумму.
6) Сформулируйте алгоритм применения и составления формул приведения.