Уважаемые студенты!

Задание:

1. Изучить материал лекции. Тезисно законспектировать. В конспект обязательно записать примеры решения задач.

2. Решить задачи для самостоятельного решения!

Фотоотчет выслать на электронную почту xvsviv@rambler.ru, при возникновении вопросов обращаться по телефону 0721389311 (WhatsApp).

Лекция на тему: «Нахождение площадей криволинейных трапеций»

1. Пусть функция $y = f(x)$ неотрицательна и непрерывна на отрезке $[a;b]$. Тогда по геометрическому смыслу определённого интеграла площадь S под кривой $y = f(x)$ на $[a;b]$ (см. рис 1) численно равна определённому интегралу $\int_a^b f(x)dx$, т. е.

$$S = \int_a^b f(x)dx. \qquad (1)$$

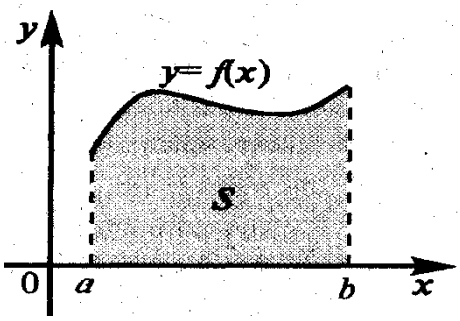


Рисунок 1 – Иллюстрация площади криволинейной трапеции

Пример 1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $x = \sqrt{y}$, $x = 0$, $y = 4$.

Решение:

Из чертежа (см. рисунок 2) видно, что искомая площадь S криволинейного треугольника OAB равна разности двух площадей:

$$S = S_{OABC} - S_{OBC},$$

каждая, из которых находится по геометрическому смыслу определённого интеграла.

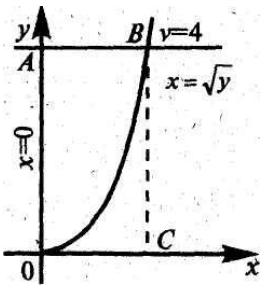


Рисунок 2 – Иллюстрация к примеру 1

Решая систему $\begin{cases} y = 4 \\ x = \sqrt{y} \end{cases}$,

получаем, что точка *B* пересечения прямой *y=4* и кривой $x=\sqrt{y}$ имеет координаты (2;4).

Тогда

$$S_{OABC}=\int_0^2 4dx = 4\int_0^2 dx = 4x\Big|_0^2 = 8,$$

$$S_{OBC}=\int_0^2 x^2dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = \frac{8}{3}.$$

Окончательно $S = 8 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3}$ (ед.^{2})

2. Пусть функция $y = f(x)$ неположительна и непрерывна на $[a;b]$(см. рисунок 3).

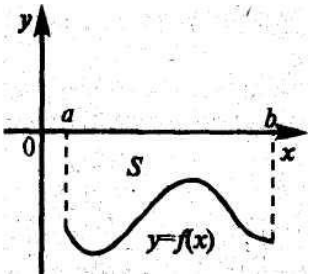


Рисунок 3 – Иллюстрация неположительной функции

Выясним, какая связь в этом случае существует между площадью *S* криволинейной трапеции «над кривой» $y = f(x)$ на $[a;b]$ и интегралом $\int_a^b f(x)dx.$ Отражая кривую $y = f(x)$ относительно оси абсцисс, получаем кривую с уравнением $y = -f(x)$. Функция $y = f(-x)$ уже неотрицательна на $[a;b]$, а площадь под этой кривой на $[a;b]$ из соображений симметрии равна площади *S* (см. рисунок 4) .

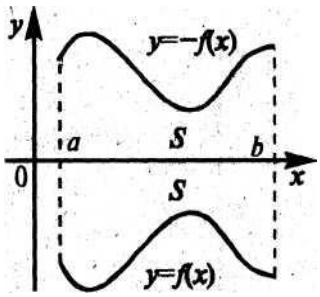


Рисунок 4 – Иллюстрация симетричности функций $y = f(x)$ и $y = -f(x)$

Тогда,

$$S = \int_a^b (-f(x))dx \text{, т.е.} \quad S = -\int_a^b f(x)dx. \qquad (2)$$

Таким образом, если функция $y = f(x)$ неположительна на $[a;b]$,то площадь S над кривой $y = f(x)$ на $[a;b]$ отличается знаком от определённого интеграла $\int_a^b f(x)dx$.

Пример 2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = -x^2$, $y = x - 2$, $y = 0$.

Решение:

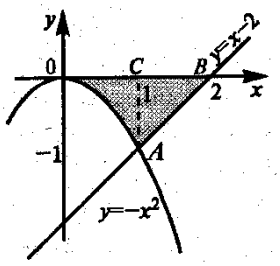


Рисунок 5 – Иллюстрация к примеру 2

Из рисунка 5 видно, что искомая площадь S криволинейного треугольника OAB может рассматриваться как площадь над кривой OAB на отрезке $[0;2]$. Однако указанная кривая (ломаная) не задаётся одним уравнением. Поэтому для нахождения $S = S_{OAB}$ разобьём криволинейный треугольник OAB на части, проецируя точку A излома на ось абсцисс. Тогда $S = S_{OAC} + S_{ABC}$ (см. рисунок 5). Абсциссы точек O, A, B задают пределы интегрирования ($O(0;0)$, $A(1;-1)$, $B(2;0)$).

$$S_{OAC} = -\int_0^1 (-x^2)dx = \int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3},$$

$$S_{ABC} = -\int_1^2 (x-2)dx = (-\frac{x^2}{2} + 2x)\Big|_1^2 = \frac{1}{2}.$$

Окончательно $S = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$ (ед.^{2}).

3. Пусть на отрезке $[a;b]$ задана непрерывная функция $y = f(x)$ общего вида. Предположим также, что исходный отрезок можно разбить точками на конечное число интервалов так, что на каждом из них функция $y = f(x)$ будет знакопостоянна или равна нулю.

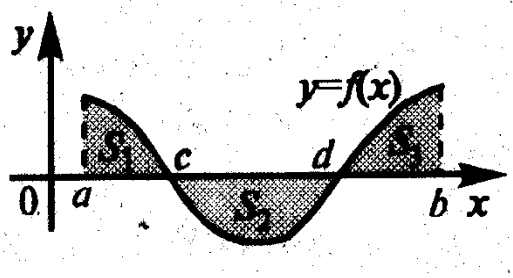


Рисунок 6 – Иллюстрация функции, когда функция несколько раз пересекает ось абсцисс

Рассмотрим, например, случай функции, изображенной на рисунке 6. Площадь заштрихованной фигуры $S = S_1 + S_2 + S_3$, т.е. равна алгебраической сумме соответствующих определённых интегралов:

$$S = \int_a^c f(x)dx - \int_c^d f(x)dx + \int_d^b f(x)dx.$$

4. Приведём формулу, применение которой часто упрощает решение задач на вычисление площадей плоских фигур.

<u>Теорема.</u> ***Пусть на отрезке*** $[a,b]$ ***заданы непрерывные функции*** $y = f_1(x)$ ***и*** $y = f_2(x)$ ***такие, что*** $f_2(x) \geq f_1(x)$. ***Тогда площадь*** S ***фигуры, заключённой между кривыми*** $y = f_2(x)$ ***и*** $y = f_1(x)$, ***на отрезке*** $[a,b]$ ***вычисляется по формуле***

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx. \qquad (3)$$

Проиллюстрируем теорему графически (см. рисунок 7).

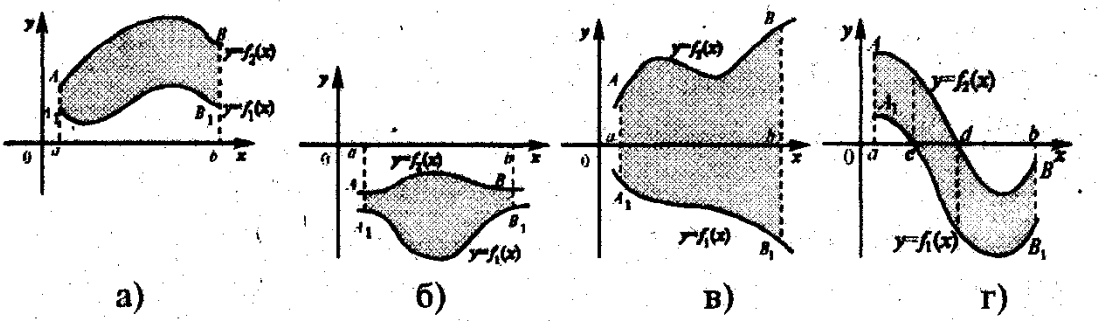


Рисунок 7 – Иллюстрация к формуле 3

Возможны несколько случаев расположения кривых на отрезке $[a,b]$.

1) $f_2(x) \geq f_1(x) \geq 0$. (см. рисунок 7 а)

$S = S_{aABb} - S_{aA_1B_1b} = \int\limits_a^b f_2(x)dx - \int\limits_a^b f_1(x)dx,$ откуда следует формула (3).

2) $f_1(x) \leq f_2(x) \leq 0.$ (см. рисунок 7 б)

$S = S_{aA_1B_1b} - S_{aABb} = -\int\limits_a^b f_1(x)dx - (-\int\limits_a^b f_2(x)dx),$ откуда следует (3).

3) $f_2(x) \geq f_1(x),\ \ f_2(x) \geq 0,\ \ f_1(x) \leq 0.$ (см. рисунок 7 в)

$S = S_{aABb} + S_{aA_1B_1b} = \int\limits_a^b f_2(x)dx + (-\int\limits_a^b f_1(x)dx),$ откуда следует (3).

4) Общий случай (см. рис. 1.7 г) сводится к частным случаям, рассмотренным выше, если разбить отрезок $[a,b]$ на отдельные отрезки $[a,c]$, $[c,d]$, $[d,b]$.

Пример 3. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 - 2$, $y = x$. (см. рисунок 8).

Решение:

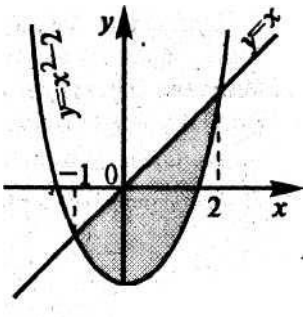


Рисунок 8 – Иллюстрация к примеру 3

Найдём координаты точек пересечения параболы $y = x^2 - 2$ и прямой $y = x$, решив систему этих уравнений: (-1;-1) и (2;2). На отрезке $[-1;2]$ $x \geq x^2 - 2$. Воспользуемся формулой (1.3), полагая $f_2(x) = x,\ \ f_1(x) = x^2 - 2.$

Абсциссы точек A и B пересечения наших линий зададут пределы интегрирования:

$$S = \int\limits_{-1}^{2}(x - (x^2 - 2))dx = \frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{2} - \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{2} + 2x\Big|_{-1}^{2} = \frac{1}{2}(4 - (-1)^2) - \frac{1}{3}(2^3 - (-1)^3) + 2(2 - (-1)) = 4{,}5\ \ (ед.^2)$$

Упражнения для самостоятельной работы

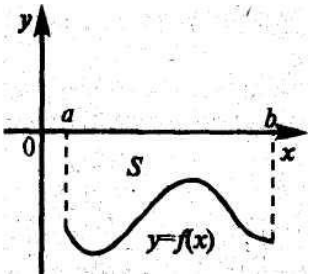
Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

1.1. $y = x^2 + 1, осью\ Ox$ и $x = 1, x = 4.$

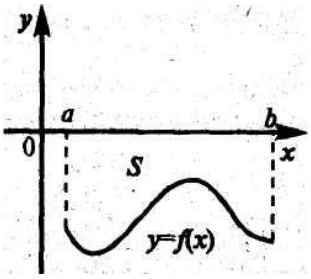
1.2. $y = -x^2, x + y + 2 = 0$

Контрольные вопросы:

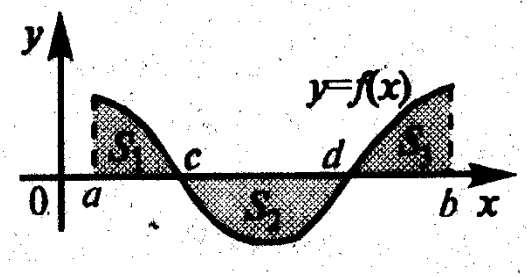
1. Запишите формулу вычисления площади криволинейной трапеции, соответствующей рисунку:



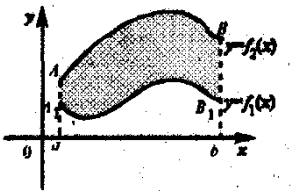
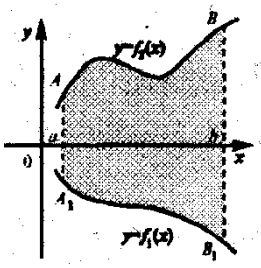
2. Запишите формулу вычисления площади криволинейной трапеции, соответствующей рисунку:



3. Запишите формулу вычисления площади криволинейной трапеции, соответствующей рисунку:



4. Запишите формулу вычисления площади криволинейной трапеции, соответствующей рисунку:



4. Запишите формулу вычисления площади криволинейной трапеции, соответствующей рисунку: