Уважаемые студенты!

Задание:

1. Изучить материал лекции. Тезисно законспектировать. В конспект обязательно записать примеры решения задач.

2. Решить задачи для самостоятельного решения!

Фотоотчет выслать на электронную почту xvsviv@rambler.ru, при возникновении вопросов обращаться по телефону 0721389311 (WhatsApp).

Лекция на тему: «Применение определенного интеграла»

План

1. Вычисление объемов тел вращения
2. Применения определенного интеграла к решению физических и технических задач
   - 2.1. Путь, пройденный телом
   - 2.2. Работа переменной силы
   - 2.3. Вычисление силы давления жидкости

1. Вычисление объемов тел вращения

Пусть на отрезке $[a;b]$ задана непрерывная функция $y = f(x)$. Необходимо найти объём V_x тела, образованного при вращении вокруг оси абсцисс криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$, $x = b$.

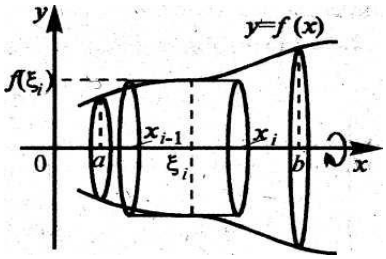

Рисунок 1 – Иллюстрация образования тела вращения

Для решения задачи разобьём отрезок $[a;b]$ на элементарные отрезки точками: $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$ и на каждом из отрезков разбиения $[x_{i-1}; x_i]$ некоторым образом выберем точку ξ_i, где $i = 1,2...,n$. Тогда некоторое приближение для искомого объема даст следующая сумма $\sum_{i=1}^{n} \pi f^2(\xi_i)\Delta x_i$ $i-e$ слагаемое которой $(i = 1,2,...,n)$ - это объём цилиндра с высотой $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ и радиусом основания $f(\xi_i)$ (см. рис. 1.9). Очевидно, что приближение для искомого объёма V_x будет тем лучше, чем меньше длина

отрезков разбиения Δx_i, поэтому за искомый объём V_x естественно взять следующий предел

$$V_x = \lim_{\max\limits_i \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \pi f^2(\xi_i)\Delta x_i \ ,$$

где $\max\limits_i \Delta x_i$ - максимальная из длин отрезков разбиения. Но выражение, стоящее в правой части последнего равенства, не что иное, как предел интегральной суммы для функции $\varphi(x) = \pi f^2(x)$, поэтому окончательно получаем

$$V_x = \pi \int_a^b f^2(x)dx \ . \ (1)$$

Пример 1. Вычислить объём тела, полученного от вращения фигуры, ограниченной линиями $y = e^{-x}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$ вокруг оси Ox.

Решение:

По формуле (1.4) искомый объём

$$V_x = \pi \int_0^1 (e^{-x})^2 dx = \pi(-\frac{1}{2}e^{-2x})\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}(1-\frac{1}{e^2}) \approx 1{,}36 \ \ e\partial^3.$$

Пример 2. Найти объём тела, образованного вращением эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ вокруг оси Ox.

Решение:

Так эллипс симметричен относительно осей координат, то достаточно найти половину искомого объёма. По формуле (1) имеем:

$$\frac{1}{2}V = \pi \int_0^a y^2(x)dx = \pi \int_0^a b^2(1-\frac{x^2}{a^2})dx = \pi b^2 \int_0^a dx - \frac{\pi b^2}{a^2}\int_0^a x^2 dx = (\pi b^2 x - \frac{\pi b^2 x^3}{3a^2})\Big|_0^a =$$

$$= \pi b^2 a - \frac{\pi b^2 a^3}{3a^2} = \frac{2}{3}\pi a b^2.$$

Следовательно, $\frac{1}{2}V = \frac{2}{3}\pi a b^2$, откуда $V = \frac{4}{3}\pi a b^2$.

Если $a = b = R$, то эллипс является окружностью. Тогда объём тела вращения окружности вокруг оси Ox есть шар, объём которого

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Формально заменяя в формуле (1) переменную x на y, получаем формулу для вычисления объёма V_y тела, полученного от вращения криволинейной трапеции вокруг оси ординат: $V_y = \pi \int_c^d \varphi^2(y)dy.$ (2)

(на рисунке 2 вращаемая криволинейная трапеция заштрихована).

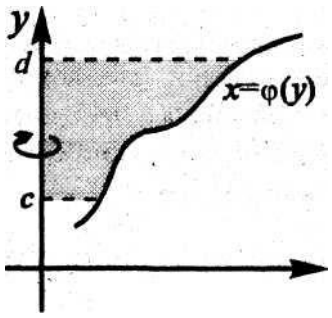

Рисунок 2 – Иллюстрация вращения вокруг оси ординат

Пример 3. Найти объём тела, полученного от вращения вокруг оси ординат плоской фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$, $y = x^3$.

Решение:

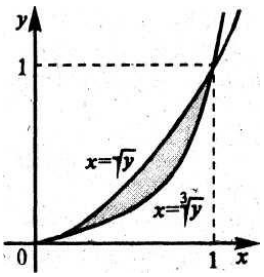

Рисунок 3 – Иллюстрация к примеру 3

Проецируя вращаемую фигуру на ось ординат (см. рисунок 3), убеждаемся, что искомый объём V равен разности двух объёмов: объёма V_{y_1}, полученного от вращения вокруг оси ординат фигуры, ограниченной линиями $x = \sqrt[3]{y}$, $x = 0$, $y = 1$, и объёма V_{y_2}, для которого вращаемая фигура ограничена линиями $x = \sqrt{y}$, $x = 0$, $y = 1$. (С учётом предстоящего применения формулы (2) уравнения кривых записаны в виде $x = \varphi(y)$, предполагающем переменную y независимой). Применяя (2), получаем:

$$V_{y_1} = \pi\int_0^1 (\sqrt[3]{y})^2\,dy = \pi\int_0^1 y^{2/3}dy = \pi\,\frac{3y^{5/3}}{5}\Big|_0^1 = \frac{3}{5}\pi,$$

$$V_{y_2} = \pi\int_0^1 (\sqrt{y})^2\,dy = \pi\int_0^1 y\,dy = \pi\,\frac{y^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}.$$

Окончательно $V = V_{y1} - V_{y2} = \frac{3}{5}\pi - \frac{1}{2}\pi = 0{,}1\pi(ед^3)$.

Упражнения для самостоятельной работы

Найти объём тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями:

1.1. $y = e^x$, $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ вокруг оси Ox.

1.2. $y = x^3$, $y = 1$, $x = 0$ вокруг оси Ox

2. Применения определенного интеграла к решению физических и технических задач

2.1. Путь, пройденный телом

Из школьного курса известно, что путь, пройденный телом, перемещающимся со скоростью $\upsilon = \upsilon(t)$,за промежуток времени $[t_1; t_2]$, выражается интегралом

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \upsilon(t)dt. \qquad (3)$$

Пример 4. Автобус начинает двигаться с ускорением 1м/с^2. Какой путь пройдет автобус за 12 секунд от начала движения?

Решение:

Скорость движения автобуса выражается формулой $\upsilon = t$ м/с. Согласно формуле (3) находим путь, пройденный автобусом за время от $t_1 = 0$ до $t_2 = 12$ сек: $S = \int_0^{12} tdt = \frac{t^2}{2}\Big|_0^{12} = 72$ м.

2.2. Работа переменной силы

Определенный интеграл широко применяется не только при вычислении различных геометрических величин, но и при решении ряда физических и технических задач. Так, например, известно, что работа A, совершаемая переменной силой $f(x)$ на пути от точки $(a;0)$ до точки $(b;0)$, вычисляется по формуле

$$A = \int_a^b f(x)dx. \qquad (4)$$

Пример 5. Какую работу надо совершить, чтобы растянуть пружину на 0,05 м, если известно, что для ее растягивания на 0,01 м нужна сила в 1 H?

Решение:

Согласно закону Гука сила F, растягивающая или сжимающая пружину на x м, пропорциональна этому растяжению или сжатию, т. е. $F = kx$, где k – коэффициент пропорциональности. Из условия задачи известно, что для растяжения пружины на $x = 0{,}01$м требуется сила $F = 1H$, Поэтому $1 = k \cdot 0{,}01$, откуда $k = 100$; следовательно, $F = 100x$.

В задаче требуется найти работу, совершаемую при растяжении пружины на 0,05м из состояния покоя, поэтому переменная x изменяется от $x = 0$ до $x = 0{,}5$. Таким образом, подставив в формуле (4) $f(x) = 100x, a = 0, b = 0{,}05$, найдем искомую работу $A = \int_0^{0,05} 100xdx = 50x^2\Big|_0^{0,05} = 0{,}125(Дж)$.

2.3. Вычисление силы давления жидкости

Согласно закону Паскаля величина силы P давления жидкости в ньютонах на горизонтальную площадку вычисляется по формуле

$$P = g\rho hS, \qquad (5)$$

где g -ускорение свободного падения в м/с^2, ρ -плотность жидкости в кг/м^2, S -площадь площадки в м^2, h -глубина погружения площадки в м.

Если же площадка погружена в жидкость не горизонтально, то формула (5) неприменима, так как в этом случае сила P давления жидкости изменяется с глубиной. Рассмотрим задачу вычисления силы давления жидкости на вертикальную площадку.

Задача. Пусть пластинка произвольной формы погружена вертикально в жидкость плотностью ρ так, что расстояние от поверхности жидкости до верхней точки A пластинки равно H_1, а до ее нижней точки B равна H_2 (см. рисунок 4).

Требуется вычислить силу P давления жидкости на пластинку.

Решение:

Разобьем пластинку на n тонких полосок прямыми, параллельными поверхности жидкости: $h_0 = H_1,\ h_1,...,h_n = H_2$.

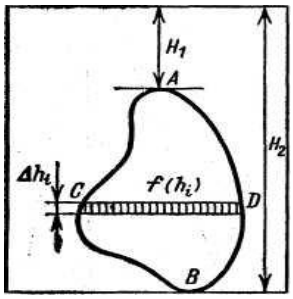

Рисунок 4 – Иллюстрация 1 к задаче

На глубине h_i выделим одну из них (на рисунке 4 она заштрихована) и обозначим через $f(h_i)$ ее длину, а через Δh_i - ее ширину. Приняв (с некоторой погрешностью) полоску за прямоугольник, находим ее площадь

$$\Delta S_i \approx f(h_i)\Delta h_i.$$

Предположим (также с некоторой погрешностью), что давление во всех точках рассматриваемой полоски одинаково и равно давлению на глубине h_i. Тогда силу ΔP_i давления жидкости на полоску площади ΔS_i можно определить по формуле (5) $\Delta P_i \approx g\rho h_i \Delta S_i$ или $\Delta P_i \approx g\rho h_i f(h_i)\Delta h_i$.

Суммируя элементарные давления ΔP_i на каждую из n полосок, найдем приближенное значение силы P давления жидкости на всю пластинку

$P \approx \sum_{i=1}^{n} g\rho h_i f(h_i)\Delta h_i$. При неограниченном увеличении числа n делений данной пластинки так, что $\Delta h = \max \Delta h_i \to 0$, по определению полагаем

$$P = \lim_{\Delta h \to 0} \sum_{i=1}^{n} g\rho h_i f(h_i)\Delta h_i = g\rho \lim_{\Delta h \to 0} \sum_{i=1}^{n} h_i f(h_i)\Delta h_i .$$

Таким образом, сила давления жидкости на вертикальную пластинку вычисляется по формуле

$$P = g\rho \int_{H_1}^{H_2} hf(h)dh . \qquad (5)$$

Пример 6. Треугольная пластинка с основанием 0,3м и высотой 0,6м погружена вертикально в воду так, что ее вершина лежит на поверхности воды, а основание параллельно ей. Вычислить силу давления воды на пластинку (см. рисунок 5).

Решение:

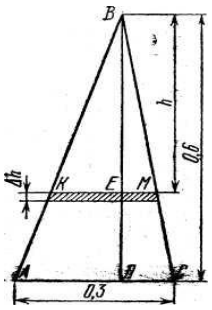

Рисунок 5 – Иллюстрация к примеру 6

Выделим на глубине h тонкую пластинку (на рисунке 5 она заштрихована) и найдем ее длину $KM = f(h)$. Из подобия треугольников ABC и KBM имеем

$$\frac{KM}{AC} = \frac{BE}{BD}, \text{ или } \frac{KM}{0,3} = \frac{h}{0,6} .$$

Отсюда $KM = f(h) = \frac{1}{2}h$.

Так как вершина пластинки лежит на поверхности воды, а высота пластинки равна 0,6м, то в формуле (5) следует положить $H_1 = 0$ и $H_2 = 0,6$. Кроме этого, $g = 9,807$ м/с^2 и $\rho = 1000$ кг/м^3, поэтому

$$P = 9,807 \cdot 1000 \int_0^{0,6} h \frac{1}{2} h dh = 4903,5 \frac{h^3}{3} \Big|_0^{0,6} = 1634,5 \cdot 0,216 \approx 353(H) .$$

Упражнения для самостоятельной работы

2.1. Определить давление воды на вертикальный прямоугольный шлюз с основанием 18 м и высотой 6 м.

2.2. Вычислить работу, необходимую для выкачивания масла из вертикального цилиндрического резервуара высотой $H = 6$ м и радиусом основания $R = 2$ м. Плотность масла $\rho = 0,9$.