Задание

1. Изучить и кратко законспектировать материал лекции. Обязательно решить задания в лекции.

2. Фотоотчет присылать на электронную почту в трехдневный срок

С уважением, Хвастова Светлана Ивановна

!!! Если возникнут вопросы обращаться по телефону 0721389311. Электронная почта: xvsviv@rambler.ru

*ЛЕКЦИЯ «*Понятие бинарного отношения и его свойства. Основные понятия.*»*

Цель: дать понятие отношения, изучить способы задания бинарных отношений, рассмотреть способы задания бинарных отношений на конкретных примерах.

План

1. Свойства бинарных отношений.

2. Основные понятия.

Свойства бинарных отношений

Определение: Пусть ρ - бинарное отношение на множестве А. Тогда:

а) ρ - рефлексивно, если $(x,x)\in\rho$ для $\forall x\in A$.

(главная диагональ матрицы содержит только единицы)

б) ρ - антирефлексивно, если $(x,x)\notin\rho$ $\forall x \in A$.

(главная диагональ матрицы содержит только нули)

в) ρ - симметрично, если из того, что $(x,y)\in\rho$ следует, что $(y,x)\in\rho$.

($\rho=\rho^{-1}$ *матрица отношения симметрична относительно главной диагонали*)

г) ρ - антисимметрично, если из того, что $(x,y)\in\rho$ и $(y,x)\in\rho$ следует, что $x=y$.

Замечание: Отношение ρ антисимметрично тогда и только тогда, когда из того, что $((x,y)\in\rho$ и $x\neq y)\Rightarrow(x,y)\notin\rho$.

д) ρ - транзитивно, если из того, что $(x,y)\in\rho$ и $(y,z)\in\rho$ следует, что $(x,z)\in\rho$

Замечание: Антисимметричность есть следствие антирефлексивности и транзитивности.

Пример: $\rho = \{(x,y)|\ x, y\in N$ и $y \vdots x$ т.е. x - делитель y$\}$

а) рефлексивно, т.к. $x \vdots x \quad \forall\ x \in N$

б) несимметрично, т.к. 2 - делитель 4, но 4 не является делителем 2.

в) транзитивно, т.к., если $y \vdots x$ и $z \vdots y$, то $z \vdots x$

г) антисимметрично, т.к. если $x \vdots y$ и $y \vdots x$, то $x=y$.

Замечание: Если отношение рефлексивно, то оно не антирефлексивно. Если отношение антирефлексивно, то оно не рефлексивно. Отношение может быть ни рефлексивным, ни антирефлексивным. Свойства симметричности и антисимметричности не являются взаимоисключающими. Для $\forall$ множества A отношение τ_A является симметричным и антисимметричным. Можем так же иметь отношения, которые не являются ни симметричными, ни антисимметричными.

Пример: P- множество всех людей. $\beta=\{(x,y)|\ x,y\in P$, x является братом y$\}$.

Пусть в семье два брата p и q и сестра r. Зададим бинарное отношение в виде графа (см. рисунок 1).

β несимметрично т.к. $(p, r)\in\beta$, но $(r, p)\notin\beta$

β не антисимметрично $(p, q)\in\beta$, и $(q, p)\in\beta$, но $q \neq p$.

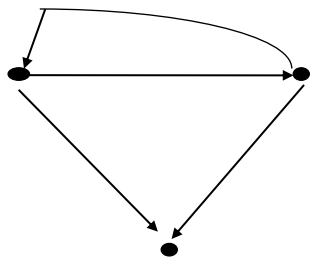

Рисунок – 1. Пример бинарного отношения.

Если отношение задано в виде графа, то свойства можно сформулировать следующим образом:

а) отношение рефлексивно тогда и только тогда, когда для каждого узла (точки) на диаграмме существует стрелка, которая начинается и заканчивается в этом узле (петля).

б) отношение симметрично тогда и только тогда, когда для каждой стрелки, соединяющей два узла, существует также стрелка, соединяющая эти узлы в обратном направлении.

в) отношение транзитивно тогда и только тогда, когда для каждой пары узлов x и y, связанных последовательностью стрелок от x к a_1, от a_1 к a_2, ..., от a_{n-1} к a_n, от a_n к y, существует так же стрелка от x к y;

г) отношение антисимметрично тогда и только тогда, когда не существует двух различных узлов, связанных парой стрелок.

Определение: Для $\forall$ отношения ρ отношение $\hat{\rho}$, называемое *транзитивным замыканием* ρ, определяется следующим образом: $(a, b)\in \hat{\rho}$, если во множестве A существует цепочка из n элементов $a=a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a_n=b$, в котором между соседними элементами выполнено ρ: $(a,a_2)\in\rho$, $(a_2,a_3)\in\rho,...,(a_{n-1}, b)\in\rho$. Если ρ транзитивно, то $\hat{\rho}=\rho$.

Транзитивным замыканием отношения “быть сыном” является отношение “быть прямым потомком”, являющееся объединением отношений “быть сыном” и “быть внуком”, “быть правнуком “ и т.д. Транзитивным замыканием отношения “ иметь общую стену” для жильцов дома является отношение “жить на одном этаже”.

2. Операции над бинарными отношениями

Пусть $A\neq\varnothing$, $A^2 = A \times A$ и α, β, γ, $\subseteq A^2$ - некоторые бинарные отношения, определенные на множестве A . $A^2 = A\times A=(x,y)|\ x, y\in A\}$.

Операции над бинарными отношениями:

1) $\alpha\cup\beta=\{(x,y)|(x,y)\in\alpha$ или $(x,y)\in\beta\}$

2) $\alpha\cap\beta=\{(x,y)|(x,y)\in\alpha$ и $(x,y)\in\beta\}$

3) $\alpha\backslash\beta=\{(x,y)|(x,y)\in\alpha$ и $(x,y)\notin\beta\}$

4) $\alpha'=\{(x,y)|(x,y)\notin\alpha$ и $(x,y)\in A^2\}$

5) $\alpha^{-1}=\{(x,y)|(y,x)\in\alpha\}$

6) $\alpha\beta=\{(x,y)|\exists z\in A,(x,z)\in\alpha$ и$(z,y)\in\beta\}$- произведение отношений α и β

Относительно введенных операций имеют место следующие свойства:

1) $\alpha\cap\alpha=\alpha\cup\alpha=\alpha$

2) $\alpha(\beta\gamma)=(\alpha\beta)\gamma$

3) $\alpha(\beta\cap\gamma)=\alpha\beta\cap\alpha\gamma$ $(\beta\cap\gamma)\alpha=\beta\alpha\cap\gamma\alpha$

4) $\alpha(\beta\cup\gamma)=\alpha\beta\cup\alpha\gamma$ $(\beta\cup\gamma)\alpha=\beta\alpha\cup\gamma\alpha$

5) $(\alpha^{-1})^{-1}=\alpha$

6) $(\alpha\cup\beta)^{-1}=\alpha^{-1}\cup\beta^{-1}$ $(\alpha\cap\beta)^{-1}=\alpha^{-1}\cap\beta^{-1}$

7) $(\alpha\beta)^{-1}=\beta^{-1}\alpha^{-1}$

8) $(\alpha')^{-1}=(\alpha^{-1})'$

Связь между операциями над отношениями и свойствами отношений.

1) Объединение и пересечение двух рефлексивных отношений на множестве А рефлексивно.

2) Объединение и пересечение двух симметричных отношений на множестве А симметрично.

3) Объединение и пересечение двух антирефлексивных отношений на множестве А антирефлексивно.

4) При любом отношении ρ на множестве А отношение $\rho\cup\rho^{-1}$ и $\rho\cap\rho^{-1}$ симметричны.

5) Объединение двух антисимметричных отношений на множестве А может не быть антисимметрично, пересечение двух антисимметричных отношений на множестве А антисимметрично.

Объединение двух транзитивных отношений на множестве А может не быть транзитивно, пересечение двух транзитивных отношений на множестве А транзитивно.

Примеры свойств отношений

Задача 1. Определите свойства отношения R – «быть делителем», заданного на множестве натуральных чисел.

Решение.

отношение R = {(a,b):a делитель b}:

- рефлексивно, не антирефлексивно, так как любое число делит само себя без остатка: $a/a = 1$ для всех $a \in N$;
- не симметрично, антисимметрично, например, 2 делитель 4, но 4 не является делителем 2;
- транзитивно,таккакесли $b/a \in N$ и $c/b \in N$, то $c/a = b/a \cdot c/b \in N$, например, если $6/3 = 2 \in N$ и $18/6 = 3 \in N$, то $18/3 = 18/6 \cdot 6/3 = 6 \in N$.

Задача 2. Определите свойства отношения R – «быть братом», заданного на множестве людей.

Решение.

Отношение R = {(a,b):a - брат b}:

- не рефлексивно, антирефлексивно из-за очевидного отсутствия aRa для всех a;
- не симметрично, так как в общем случае между братом a и сестрой b имеет место aRb , но не bRa ;
- не антисимметрично, так как если a и b –братья, то aRb и bRa, но $a \neq b$;
- транзитивно, если называть братьями людей, имеющих общих родителей (отца и мать).

Задание к лекции:

Определите свойства отношения R_i , заданного на множестве M_i матрицей, если:

1. R_1 «иметь один и тот же остаток от деления на 5»; M_1 множество натуральных чисел.
2. R_2 «быть равным»; M_2 множество натуральных чисел.
3. R_3 «жить в одном городе»; M_3 множество людей.